INTERNAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
19 APR 1938

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

FEBRERO 1938. — ENTREGA II. — TOMO CXXV

SUMARIO

Pág.

*MATEMATICAS:*

C. E. DIEULEFAIT. — Los momentos de un grupo de funciones de probabilidad y sus relaciones con las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Las ecuaciones de Laplace. Las fracciones continuas algebraicas y la suma de las series divergentes . . . . . 81

JOSÉ BABINI. — ¿Matemáticas o matemática? Disertación radiotelefónica 112

*FISICA:*

ADOLFO T. WILLIAMS. — La estructura de los espectros y las líneas últimas . . . . . 116

JOSÉ PIAZZA. — Nuevo motor térmico . . . . . 139

*CIENCIAS ECONOMICAS:*

MAURICIO DURRIEU. — Cotejos económicos y selección económica (*Continuación*) . . . . . 145

*BIBLIOGRAFIA*, por R. V. — L. E. R. — M. . . . . 158

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FÉ 1145

1938

# SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA


## SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Philippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †
Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †
Dr. Enrique Ferri †
Ing. Eduardo Huergo †
Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Walter Nernst
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Cristóbal M. Hicken †

## CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V. Zappi.

## JUNTA DIRECTIVA

(1937-1938)

| | |
|---|---|
| *Presidente* ..... | Ingeniero **Jorge W. Dobranich** |
| *Vicepresidente 1º* ..... | Ingeniero **Evaristo V. Moreno** |
| *Vicepresidente 2º* ..... | Doctor **Gonzalo Bosch** |
| *Secretario de Actas* ..... | Doctor **Antonio Casacuberta** |
| *Secretario de Correspondencia* . | Doctor **Santiago Barabino Amadeo** |
| *Tesorero* ..... | Arquitecto **Carlos E. Géneau** |
| *Pro-tesorero* ..... | Profesor **José F. Molfino** |
| *Bibliotecario* ..... | Ingeniero **José S. Gandolfo** |
| *Vocales* ..... | Ingeniero **Carlos Posadas** |
| | Doctor **Juan Ubaldo Carrea** |
| | Doctor **Reinaldo Vanossi** |
| | Ingeniero **Mario L. Negri** |
| | Doctor **Angel H. Roffo** |
| | Capitán de Fragata **Héctor R. Ratto** |
| | Doctor **Jorge Magnin** |
| | Ingeniero **Ricardo J. Gutiérrez** |


**ADVERTENCIA.** — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.


**Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires**

# LOS MOMENTOS DE UN GRUPO DE FUNCIONES DE PROBABILIDAD

## Y SUS RELACIONES CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN, LAS ECUACIONES DE LAPLACE, LAS FRACCIONES CONTINUAS ALGEBRAICAS Y LA SUMA DE LAS SERIES DIVERGENTES

POR

C. E. DIEULEFAIT

(Universidad del Litoral)

Resumen

Después de recordar los elementos básicos del teorema fundamental del Cálculo de las probabilidades, lo que principalmente tiene por objeto introducir algunas ideas esenciales para puntos ulteriores, fijamos nuestra atención en la definición de las funciones de probabilidad del grupo $(P)$ de Pearson. Efectuamos una clasificación de las funciones de este grupo, fijando en él los elementos que luego han de conducirnos a los polinomios de Jacobi, Legendre, Laguerre, Tchebycheff, Hermite, etc. Damos en seguida una generalización de la fórmula de Olindo Rodrígues que éste usó para definir los polinomios esféricos de Legendre y que a nosotros nos sirve para efectuar un razonamiento único, válido para todo el grupo de los polinomios anteriormente designados. Probamos la ortogonalidad de estos polinomios con las funciones de probabilidad del grupo $P$, y partiendo de esta misma ortogonalidad encontramos el grupo de las ecuaciones diferenciales de segundo orden que estos polinomios satisfacen. Esto nos permite encarar la solución de este grupo de ecuaciones, explicitando directamente una de sus soluciones particulares en el caso que la ecuación de segundo grado relativa al término sin derivación dé una raíz entera positiva. Como una aplicación de estas ideas damos una solución de la conocida ecuación diferencial de la serie hipergeométrica, hallando nuevamente la elegante relación de los polinomios de Jacobi con las series de Gauss en un caso particular de la misma.

Consideramos un grupo de problemas que se había propuesto y había resuelto Laguerre, concerniente al desarrollo en fracciones continuas de varias funciones que de inmediato vemos corresponden al grupo $P$, observación que nos permite resolver el problema más directamente y explicitando las fórmulas de los denominadores de las reducidas sucesivas. Probamos luego que las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden del grupo ya hallado tienen sus soluciones ortogonales con las funciones de probabilidad $P$, lo que plantea naturalmente la cuestión de buscar en el caso general de soluciones particulares no polinómicas sino de series, una explicitación de las mismas. Partiendo de la integral de Cauchy, logramos dar esta solución ya en un caso obtenida por Schläfli para los polinomios de Legendre (que son los que corresponden a una probabilidad constante), extendiéndola para los polinomios o series correspondientes a cualquier función $P$. Hacemos ver cómo modificando ligeramente la forma de escritura de la derivada logarítmica de las funciones $P$, las funciones características de las mismas son las soluciones de las ecuaciones de Laplace de segundo orden, lo que permite una interpretación de estas ecuaciones dentro de la cual puede encontrarse una de las formas de la de Bessel. Nos referimos brevemente al problema de la suma de series divergentes, sobre todo en el sentido de determinar estas sumas por el intermedio de las funciones generatrices y con sólo aplicar las recurrencias de los momentos de las funciones $P$ calculamos la serie euleriana oscilante, la geométrica y otra sencilla que escapó al método de la media de Cesaro.

* * *

El problema fundamental del Cálculo de las Probabilidades, tiene por objeto el demostrar que los momentos de una función de probabilidad, son característicos de la misma. De ello se deduce la equiparación de ambas locuciones. La parte más fundamental de este teorema, ocurre en la recíproca, esto es, que, dada una sucesión de momentos, éstos determinan una función y sólo una, de probabilidad. Para que la sucesión así dada, implique y baste para asegurar la existencia de la función, es necesario que esta sucesión verifique una sucesión de desigualdades tales que, si con $\alpha_s$ designamos el momento $s$ de $p\,(x)$, para $x$ variable en el intervalo $(a\ b)$ o sea.

$$\alpha_s = \int_a^b p\,(x)\, x^s\, dx$$

se tenga:

$$(S) \quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{2n} \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{para } n = 0, 1, 2 \dots$$

de donde, y de acuerdo a una conocida observación del señor Borel (1):

$$\begin{vmatrix} \alpha_p & \alpha_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \alpha_{p+2} \end{vmatrix} > 0$$

La demostración puede abordarse por dos vías. Utilizando en una a función característica de una función de probabilidad o estudiando en otra el límite de una solución algebraica aproximada. La primera es la impulsada por H. Poincaré, P. Levy y otros, no sin tener sus orígenes en el mismo célebre tratado de Laplace. La segunda es la seguida por Tchebycheff, Stieljes, Markoff, etc.

Si se trata de una variable aleatoria de orden finito, en estos mismos ANALES (2) hemos mostrado, siguiendo el procedimiento de la función característica, cómo el problema quedaba resuelto.

Se daban los momentos $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_{2n-1}$ de una variable aleatoria de orden $n$. Se debía determinar $p_i$ y $x_i$ $(i = \overline{1, n})$ de modo que.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^s = \alpha_s \qquad (s = \overline{0, 2n-1}) \qquad [1]$$

Introduciendo la función característica de Cauchy.

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i e^{tx_i}$$

su segundo miembro no es otra cosa que la solución general de la ecuación diferencial a coeficientes constantes.

$$a_n \varphi(t) + a_{n-1} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \dots + a_0 \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} = 0 \qquad [2]$$

(1) E. BOREL. *Les series divergenies.*

(2) C. DIEULEFAIT. *Determinación de una ley de probabilidad*, etc. 1931.

con la condición que los $n$ $x_i$ sean las raíces de la ecuación característica:

$$a_n + a_{n-1}\, x + \ldots + a_0\, x^n = 0$$

Pero, uniendo esta ecuación con las derivadas de la [2] hasta el orden $n - 1$, se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-1}\, x + \ldots . + a_0\, x^n &= 0 \\ a_n\, \alpha_0 + a_{n-1}\, \alpha_1 + \ldots . + a_0\, \alpha_n &= 0 \\ \vdots \\ \alpha_n\, \alpha_{n-1} + a_{n-1}\, \alpha_n + \ldots . + a_0\, \alpha_{2\,n-1} &= 0 \end{aligned}$$

que resulta de observar que:

$$\left( \frac{d^s\, \varphi\,(t)}{dt^s} \right)_{t=0} = \alpha_s$$

Eliminando los coeficientes $a_n$, $a_{n-1}$, ... $a_0$ del anterior sistema, se encuentra:

$$\omega_n\,(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \ldots & \alpha_{2\,n-1} \end{vmatrix}$$

que determina los valores buscados $x_i$, obteniéndose los correspondientes $p$ de las $n$ primeras ecuaciones [1].

Considerando los polinomios:

$$X_k\,(x) = \frac{(-1)^k}{\beta_k}\, \omega_k\,(x)$$

siendo $\beta_k$ el menor complementario del elemento $x^k$ del determinante $\omega_k(x)$; los coeficientes de los términos de $x^k$ en los polinomios $X_k\,(x)$ serán entonces iguales a la unidad. Es fácil ver que los polinomios $\omega_k\,(x)$ como los $X_k\,(x)$, son ortogonales (1) o sea que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, X_k\,(x_i)\, x_i^{\nu} = 0$$

(1) C. Dieulefait. *Sobre la representac. de un func. de variable real en serie de polinom. ortogonales.* Publicac. Fac. Cs. Matemát. Univ. Litoral. 1935. (Aprovecho esta oportunidad para señalar un error de cálculo en un coeficiente de la fórmula de recurrencia, pág. 43).

para $\nu < k$. Se deduce, también, fácilmente, que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i X_k^2(x_i) = \frac{\beta_{k1+1}}{\beta_k}$$

relación que es la base para la formación de la condición $(S)$.

En el caso recordado de la variable aleatoria de orden $n$, los primeros momentos, siempre que verifiquen las condiciones $(S)$, son arbitrarios.

En cambio, los sucesivos resultan dados por relaciones fijas que deben conducir a la verificación permanente de la [1] en la cual $p_i$ y $x_i$ se han determinado, y esta condición se aplicará sin restricción para los valores de $S$.

En cambio, en el caso de que, inicialmente, se dé la sucesión de los momentos sin limitarlos, la solución anterior es tan sólo aproximada.

Consideremos, pues, la sucesión completa de los $\alpha$. De ellos tomemos provisoriamente $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2n-1}$. Supongamos que, aparte de la solución aproximada anterior, existan las cuplas $P_i, \xi_i$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \xi_i^s = \alpha_s$$

Se seguirá de ello que si $F(z)$ es un polinomio de grado no mayor que $2n - 1$, será:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i F(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i F(x_i) \qquad [3]$$

y adoptando, como está en el proceso del método de Tchebycheff [1], la definición:

$$F(z) = \frac{X_n(z)\, X_{n-1}(z)}{z - x_\nu}$$

con $x_\nu$ $(\nu = \overline{1, n})$ una de las raíces anteriores, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{X_n(\xi_i)\, X_{n-1}(\xi_i)}{\xi_i - x_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{X_n(x_i)\, X_{n-1}(x_i)}{x_i - x_\nu}$$

[1] Véase G. Castelnuovo. *Calc. delle probabilitá.* II t.

pero como $$X_n(x_\nu) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{X_n(x_i)\, X_{n-1}(x_i)}{x_i - x_\nu} = p_\nu \frac{X_n(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu)}{x_\nu - x_\nu} = p_\nu X_n'(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu)$$

de acuerdo a la simple aplicación de la regla de L'Hopital.

Luego:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{X_n(\xi_i)\, X_{n-1}(\xi_i)}{\xi_i - x_\nu} = \sum_{i=1}^{n} P_i\, X_{n-1}(\xi_i)\, Q_{n-1}(\xi_i)$$

ya que, siendo $\frac{X_n(\xi_i)}{\xi_i - x_\nu}$ exactamente divisible, nos da un polinomio de grado $n-1$ con el coeficiente del término mayor, igual a la unidad. Pero, gracias a la [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\, X_{n-1}(\xi_i)\, Q_{n-1}(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, X^2_{n-1}(\xi_i) = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$$

Luego:

$$p_\nu\, X'_n(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu) = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$$

de donde:

$$p_\nu = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}\, X'_n(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu)} \qquad [3']$$

fórmula que hace explícita la determinación de cada probabilidad calculada, ligada al valor $x_\nu$, en la solución aproximada.

El punto decisivo para la demostración trascendente del problema, es el que consiste en hacer intervenir los momentos sucesivos y en considerar, al través de las acumuladas de probabilidades (en donde está el verdadero origen de las integrales de Stieljes), las desigualdades dadas por Tchebycheff y también por Stieljes. Ellas nos conducen al resultado [1]:

$$| \Phi(a) - \Phi^{(n)}(a) | < p_a^{(n)}$$

siendo $\Phi(a)$ la suma $P_1 + P_2 + \ldots$ de los puntos $\xi_i$ supuestos, crecientemente ordenados y situados en el intervalo $-\infty, a$ y $\Phi^{(n)}(a)$

[1] Véase G. Castelnuovo, loc. cit.

la correspondiente suma $p_1 + p_2 + \ldots$ para los valores $x_i$ en el mismo intervalo y siendo $p_a^{(n)}$ la mayor de las probabilidades calculadas por la [3'] y contiguas al punto $a$.

Si la ampliación con los momentos sucesivos al $\alpha_{2n-1}$ es tal que se verifica

$$\lim_{n=\infty} p_a^{(n)} = 0$$

entonces, en ese caso, podemos afirmar, con Tchebycheff, que se tendrá:

$$\lim_{n=\infty} \Phi^{(n)}(a) = \Phi(a)$$

y el problema está, en esencia, así resuelto.

La vía de la función característica nos conduce, en cambio, para la demostración de que la sucesión de los momentos determina la función de probabilidad (suponiéndose que estos momentos se han obtenido de una función de probabilidad) a las célebres fórmulas de reciprocidad de Fourier, cuando, en lugar de la función característica de Cauchy para $p(x)$, con $x$ en $(a, b)$ y que era:

$$\varphi(t) = \int_a^b p(x)\, e^{tx}\, dx$$

hacemos $t \sim t_i$ teniéndose:

$$\psi(t) = \int_a^b p(x)\, e^{itx}\, dx$$

y como fuera del intervalo $(a\ b)$, $p(x)$ es nula al cumplir el rol de una función de probabilidad, es también.

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, e^{itx}\, dx$$

y siendo:

$$\psi(t) = \psi(0) + \frac{t}{1!}\psi'(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(n)}(0) + \ldots =$$

$$= \alpha_0 + \frac{it}{1!}\alpha_1 - \frac{t^2}{2!}\alpha_2 - \frac{it^3}{3!}\alpha_3 + \ldots$$

ya que:

$$\psi^{(n)}(t) = \int_a^b p(x)\, i^n x^n\, e^{itx}\, dx$$

y $$\psi^{(n)}(0) = i^n \alpha_n$$

$\psi(t)$ estará determinada cuando se haya dado la sucesión de los $\alpha$ y en base a la fórmula de reciprocidad de Fourier:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, e^{-itx}\, dt$$

Como nos encontraremos con ella más adelante, calculemos aquí la función característica de la función de Laplace-Gauss:

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

en el sentido de Cauchy:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{tx}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[x-t]^2}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}}$$

luego los momentos de $p_0(x)$ serán:

$$\alpha_s = \left(\frac{d^s}{dt^s}\, e^{\frac{t^2}{2}}\right)_{t=0}$$

deduciéndose fácilmente que:

$$\alpha_{2s+1} = 0 \qquad \alpha_{2s} = \frac{(2s)!}{2^s\, s!}$$

En Estadística, de la sucesión de características $\alpha$ sólo se consideran los primeros valores. No daremos aquí las razones de esta limitación y diremos que ella se restringe a los momentos $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ y $\alpha_4$ [1].

Partiendo del esquema de las pruebas repetidas, sin reposición del elemento extraído, el prof. K. Pearson se vió conducido a la consideración de una serie hipergeométrica [2], los coeficientes de cuyos términos daban las probabilidades buscadas, y encarando el estudio de la recurrencia entre dos coeficientes consecutivos, obtuvo, por una simple inferencia, para la determinación de la función de

[1] V.: C. Dieulefait. *Sobre la teoría de las funciones de frecuencia* (en prensa). Instit. de Biometría. Fac. Cs. Económ. Univ. Bs. Aires.

[2] V.: P. Elderton. *Frequency curves and correlation.*

probabilidades $\varphi(x)$, la siguiente expresión:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \qquad [P]$$

de la cual, pero ya con ello apartándose de toda significación respecto a la estructura del esquema, dedujo su clásico repertorio de funciones de probabilidad.

La « explicación » en el sentido que el señor Borel ha dado para estos estudios, ha sido tema últimamente abordado por el señor G. Polya (3) en su ya célebre teoría de los contagios, cuya prosecución se presenta como un nuevo campo abierto a nuevas y muy útiles investigaciones.

Las distintas funciones contenidas en la relación anterior de la derivada logarítmica vamos a llamarlas brevemente funciones $[P]$.

Si $a$ y $b$ son los ceros del denominador del segundo miembro de la $[P]$, se deduce de ella

$$\int_a^b \varphi'(x)\,[b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + b_2 x^{n+2}]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,[a_0 x^n + a_1 x^{n+1}]\,dx$$

e integrando por partes y por ser $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$ para $x = a$ y $x = b$ se tiene:

$$n\,b_0\,\alpha_{n-1} + (a_0 + \{n+1\}\,b_1)\,\alpha_n + (a_1 + \{n+2\}\,b_0)\,\alpha_{n+1} = 0 \qquad [R]$$

Esta recurrencia o ecuación a diferentes finitas, que es lo mismo, que más adelante consideraremos, y las más generales que se obtendrán generalizando la $[P]$ en modo de aumentar los grados del numerador y denominador del segundo miembro, viene a permitir resolver, directa y simplemente, un grupo de ecuaciones lineales a diferencias finitas con coeficientes polinomios de primer grado en el rango y aun de mayor grado si se hubieran usado $[R]$ deducidas de una segunda, etc., derivada logarítmica.

Para las determinaciones de $a_0$, $a_1$, $b_0$, $b_1$ y $b_2$ o sea de $\varphi(x)$, que de cinco se reducen en rigor a sólo cuatro dividiendo el segundo miembro de la $[P]$ por una de ellas, la $[R]$ sólo obliga a utilizar $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ y $\alpha_4$.

(3) V.: G. Polya. *Sur quelques points de la théorie des probabilités.* Ann. Inst. H. Poincaré. 1931.

Dentro de esta limitación las demás $\alpha$ se deducen con ayuda de la misma $[R]$. Por ejemplo, si fuese $\varphi(x)$ la función de Laplace-Gauss siendo:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-x}{1}$$

será $\qquad a = -\infty \quad ; \quad b = +\infty$

$$a_0 = b_1 = b_2 = 0 \qquad a_1 = -1 \quad b_0 = 1$$

Luego $[R]$ da:

$$\alpha_{n+1} = n\,\alpha_{n-1}$$

y tomando $\alpha_0 = 1$ , $\alpha_1 = 0$ , se deduce, como antes:

$$\alpha_{2s+1} = 0$$

$$\alpha_{2s} = \frac{(2s)!}{2^s\, s!}$$

Sin agotarla en sus detalles, vamos a clasificar las funciones pearsonianas de acuerdo al grado efectivo del numerador y denominador del segundo miembro de la $[P]$.

Si $a$ y $b$ son finitos y distintos [1] y el numerador de primer grado, llamaremos a este caso $J$ o jacobiano.

Si $a$ y $b$ son finitos y distintos (en particular simétricos) y el numerador es nulo, luego $\varphi(x)$ = constante, caso $L_e$ o legendriano.

Si una raíz $a$ o $b$ es $-\infty$ o $+\infty$ (luego $b_2 = 0$) y el numerador de primer grado, caso $L_a$ o laguerriano. Falta para este caso el correspondiente anterior que el numerador sea nulo, pues sería $\varphi(x) =$ = constante y extendido desde un punto fijo a otro impropio daría una masa de probabilidad infinita, de consiguiente, sin sentido.

Si $a$ y $b$ son $-\infty$ y $+\infty$ (luego $b_1 = b_2 = 0$) y numerador de primer grado, caso $H$ o hermitiano.

Esta clasificación es suficiente para nuestro objeto. Con todo es útil mencionar que el caso $J$, en particular si es:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{(1 - 2\lambda)\,x}{1 - x^2}$$

[1] Siendo, por lo demás, a partir de la $P$, $a$ y $b$ los extremos del intervalo para el cual $\varphi(x)$ está definida, si fuese $a = b$ se trataría de un caso pueril de una variable $x = a = b$ con probabilidad igual a uno, o sea, de una constante cierta.

nos conduce a los polinomios ultraesféricos. Y éstos en particular, para $\lambda = \frac{1}{2}$ al caso $L_e$. También de $J$, en particular, si es:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

se tienen los polinomios de Tchebycheff o los trigonométricos con el cambio de variables $x = \cos\theta$.

Para mayor simplicidad escribamos:

$$t(x) = a_0 + a_1 x$$

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

con lo que tendremos.

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{t(x)}{p(x)} \qquad [P]$$

No deberá ovidarse en todo lo que sigue que $t$ y $p$ son a lo sumo de grado uno y dos respectivamente.

Por esto mismo, y partiendo de $[P]$ se tiene.

$$\frac{d^n}{dx^n}\{\varphi(x)\, p^n(x)\} = \varphi(x)\, X_n(x) \qquad [4]$$

siendo $X_n(x)$ un polinomio de grado $n$. La demostración de la [4] es inmediata, basta tener presente la $[P]$ o que $\varphi' p = \varphi t$ y aplicar la regla de Leibnitz con esa precaución.

Vamos a demostrar que los polinomios $X_n(x)$ son ortogonales con $\varphi(x)$ en el intervalo $(a; b)$. Por ello la [4] es una generalización de la fórmula con que O. Rodrígues definía los polinomios de Legendre. En efecto, el caso $L_e$ se podría escribir.

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{x^2 - 1}$$

tomando $a = -1 \quad , \quad b = +1.$

$$\varphi(x) = \text{constante};$$

de donde: la fórmula de O. Rodrígues

$$K_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = X_n(x)$$

para que estos $X_n(x)$ que en su estructura son así legendrianos coin-

cidan con la forma habitual bastará tomar.

$$K_n = \frac{1}{2^n\, n!}$$

La demostración de la ortogonalidad general o sea que:

$$I_{n,n'} = \int_a^b \varphi(x)\, X_n(x)\, X_{n'}(x)\, dx = 0 \quad \text{para } n \neq n' \text{ es inmediata.}$$

Por la misma [4] se tiene:

$$I_{n,n'} = \int_a^b \frac{d^n}{dx^u} \{\varphi\, p^n\}\, X_{n'}\, dx$$

y si $n > n'$ e integramos por partes, se tiene:

$$I_{n,n'} = \left| \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \{\varphi\, p^n\}\, X_{n'} \right|_a^b - \left| \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \{\varphi\, p^n\}\, X'_{n'} \right|_a^b + \ldots$$

$$+ (-1)^n \int_a^b \varphi\, p^n\, \frac{d^n}{dx^n} X_{n'}\, dx = 0$$

pues

$$\frac{d^n}{dx^n} X_{n'}(x) = 0.$$

También son nulas las entrebarras, pues

$$\frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} \{\varphi\, p^n\} = \varphi\, p^s\, Q_{n-s}(x)$$

siendo $Q_{n-s}$ un polinomio del grado de su subíndice, y es $p(a) = p(b) = 0$.

En particular y con el mismo procedimiento se tiene:

$$I_{n.n} = (-1)^n\, n!\, \omega_{n.n} \int_a^b \varphi(x)\, p^n(x)\, dx$$

si indicamos

$$X_n(x) = \omega_{n.n}\, x^n + \omega_{n.n-1}\, x^{n-1} + \ldots$$

* * *

Es fácil obtener el grupo general de las ecuaciones diferenciales que tienen por solución a los polinomios ortogonales con las funciones

de $P$: $J$, $L_e$, $L_a$; $H$; $T$; $U$; etc., grupo que designaremos polinomios ortogonales clásicos.

Como es sabido, de acuerdo a la teoría de las fracciones continuas algebraicas — cosa que también veremos al tratar los problemas de Laguerre — este algoritmo suele ser el paso común para este estudio. Fué Jacobi quien, para los polinomios que llevan su nombre, estableció un procedimiento elegante e independiente de las fracciones continuas (1) el cual vamos a extender a todo el grupo clásico, introduciendo para ello un polinomio arbitrario.

$$\theta(x) = p(x) \frac{d\theta_{n-2}}{dx}$$

siendo $\theta_{n-2}(x)$ un polinomio cualquiera de grado $n-2$. Luego los grados de $\theta(x)$ serán $n-1$ para $J$, $L_e$; $n-2$ para $L_a$ y $n-3$ para $H$.

Luego:

$$\int_a^b \varphi(x) X_n(x) \theta(x) dx = 0$$

sustituyendo e integrando por partes:

$$\left| \theta_{n-2} \cdot \varphi \cdot p \cdot X_n \right|_a^b - \int_a^b \theta_{n-2} [\varphi' p X_n + \varphi p' X_n + \varphi p X_n'] dx = 0$$

por la nulidad de $p$ en los extremos y por ser $\varphi' p = \varphi t$ nos queda:

$$\int_a^b \varphi \theta_{n-2} [(t + p') X_n + p X_n'] dx = 0$$

pero teniendo en cuenta los grados máximos de $t$ y $p$:

$$\int_a^b \varphi \theta_{n-2} (t + p') X_n dx = 0$$

luego queda.

$$\int_a^b \varphi \theta_{n-2} p X_n' dx = 0 \quad \text{y tomando} \quad \theta_{n-2} = \frac{d\omega_{n-1}(x)}{dx}$$

con $\omega_{n-1}(x)$ un polinomio arbitrario de grado $n-1$, se encuentra, sustituyendo, integrando por partes y teniendo en cuenta las ad-

(1) V.: C. Posse. *Sur quelques applications des fractions continues.*

vertencias anteriores.

$$\int_a^b \varphi\, \omega_{n-1} \left[ (t + p')\, X'_n + p\, X''_n \right] dx = 0$$

La expresión dentro de corchetes, en la integral, es un polinomio de grado $n$; $\omega_{n-1}$ es un polinomio cualquiera de grado $n - 1$. Luego la aludida expresión sólo podrá diferir de $X_n$ a lo sumo por una constante multiplicativa; o sea:

$$(t + p')\, X'_n + p\, X''_n = K_n\, X_n$$

Para determinar $K_n$ igualo en ambos miembros los coeficientes de $x^n$ y tengo:

$$n \left[ t' + \frac{n+1}{2}\, p'' \right] = K_n$$

con lo cual queda demostrado que: siendo $\varphi(x)$ una función $[P]$, los polinomios:

$$X_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \varphi(x)\, p^n(x) \right\}$$

son una solución particular de la ecuación.

$$p(x) \frac{d^2y}{dx^2} + \left[ t(x) + p'(x) \right] \frac{dy}{dx} - n \left[ t'(x) + \frac{n+1}{2}\, p''(x) \right] y = 0. \quad [E]$$

Esto nos da, ya, un medio para calcular y explicitar una solución particular de una ecuación $E$ siempre que $n$ sea un número entero y positivo. Luego veremos cómo también resolveremos el problema cualquiera sea $n$.

La marcha a seguir para aplicar estos principios es bien sencilla. Consideremos la ecuación.

$$A(x) \frac{d^2y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C y = 0$$

con $C$ = constante y $A$ y $B$ polinomios a lo sumo de grado dos y uno respectivamente.

Determino primero $\varphi(x)$ por la ecuación

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{B(x) - A'(x)}{A(x)}$$

y si resulta que la ecuación de segundo grado en $n$:

$$A''(x)\, n^2 + 2\left[B'(x) - \frac{1}{2} A''(x)\right] n + 2\, C = 0$$

da una raíz igual a un entero positivo $r$, una solución de la ecuación diferencial dada, será:

$$y_1 = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^r}{dx^r} [\varphi(x) A^r(x)] = A(x)\, e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)} dx} \frac{d^r}{dx^r} [e^{\int \frac{B(x)}{A(x)} dx} A^{r-1}(x)]$$

Para hallar una segunda solución basta con tomar:

$$y = y_1 z$$

y derivando y sustituyendo, se tiene:

$$A(x)\, y_1 z'' + [2\, A\, y'_1 + B]\, z' = 0$$

$$\frac{z''}{z'} = -2 \frac{y'_1}{y_1} - \frac{B}{A}$$

o también

$$\frac{z''}{z'} = -2 \frac{y'_1}{y_1} - \frac{B - A'}{A} - \frac{A'}{A}$$

de donde.

$$z = \int \frac{dx}{\varphi \cdot y_1^2 \cdot A}$$

lo que nos conduce a la solución general.

Consideremos ahora la ecuación clásica.

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)\, x] \frac{dy}{dx} - \alpha \beta y = 0$$

Será:

$$p(x) = x(1-x)$$

$$t + p' = \gamma - (1 + \alpha + \beta)\, x$$

luego:

$$t = \gamma - 1 + (1 - \alpha - \beta)\, x$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\gamma - 1 + (1 - \alpha - \beta)\, x}{x(1-x)} \qquad a = 0 \qquad b = 1$$

e integrando

$$\varphi(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$$

La ecuación del coeficiente nos conduce a:

$$n^2 + (\alpha+\beta)\, n + \alpha\beta = 0$$

cuyas raíces son $-\alpha$ y $-\beta$

Luego, si, por ejemplo, $-\alpha$ es un entero positivo, una solución de la ecuación de Euler-Gauss es:

$$y_1 = X_{-a} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{d^{-a}}{dx^{-a}}\{x^{\gamma-a-1}(1-x)^{\beta-\gamma}\}$$

Pero como, por otra parte, la ecuación dada integrada en la forma corriente que consiste en partir del desarrollo

$$y_1 = \sum_s c_s\, x^{v+s}$$

nos conduce a la serie de Gauss:

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

pero si $-\alpha$ es un entero positivo, la serie se reduce a un polinomio de ese grado, y entonces, haciendo: $-\alpha = v$

$$k_v\, x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma+v-\beta}\cdot\frac{d^v}{dx^v}\{x^{\gamma+v-1}(1-x)^{\beta-\gamma}\} = F(v, \alpha, \beta, \gamma, x)$$

siendo $k_v = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+v-1)$ como se ve fácilmente por el desarrollo del primer miembro por la fórmula de Leibnitz.

Hemos determinado así esta elegante relación establecida por Jacobi.

Si en lugar de $p = x(1-x)$ se hubiera tenido el trinomio completo de segundo grado, una simple transformación [1] nos hubiera llevado al caso anterior. No insistimos sobre otras aplicaciones que escapan a la aludida transformación algebraica y fáciles de seguir por esta vía, sacrificando así esas satisfacciones en homenaje a la brevedad.

[1] V.: E. Goursat. *Cours d'Analyse Mathematique.* II t.

* * *

Vamos a ocuparnos aquí de un grupo de problemas estudiados por Laguerre (1) relativos al desarrollo en fracción continua de ciertas funciones entre las cuales mencionaremos las siguientes:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad ; \quad \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m$$

y sus casos particulares; $e^{\text{arc}\,.\,\text{tag}\,x^{-1}}$, etc.

Fácil es ver que todas estas funciones caen dentro del grupo $[P]$. Esta sencilla observación nos permititá, siguiendo los estudios de Laguerre, avanzar más directamente en su solución y con más generalidad.

Sean $\varphi(x)$ y $f(x)$ el numerador y denominador de la reducida $n$ del desarrollo de $\Phi(x)$, una de las funciones de Laguerre, del tipo $P$.

Si con $\left(\frac{1}{x^s}\right)^0$ indicamos una serie ordenada según las potencias decrecientes de $x$ y que comienza con el término $\frac{1}{x^s}$, se tendrá:

$$\Phi(x) = \frac{\varphi}{f} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)^0$$

Tomando derivadas logarítmicas y siendo $\Phi(x)$ de $P$, resulta:

$$\frac{q-p'}{p} = \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{f'}{f} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)^0$$

o sea:

$$(q-p')\,\varphi f = p\,\varphi' f - \varphi\, p f' + p f\,\varphi\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)^0$$

si $p$ es efectivamente de segundo grado, siendo $p\,\varphi f$ un polinomio de grado $2n+1$ se tendrá:

$$\varphi'\,p f - \varphi\,[p f' + (q-p')\,f] = c \qquad [5]$$

siendo $c$ una cierta constante que no nos interesa y que será nula si $p$ fuese de grado cero ó uno.

Derivando nuevamente la [5], nos queda:

$$pf'' + qf' + \frac{f}{\varphi}\,[\varphi'(q-p') + \varphi(q'-p'') - \varphi''p - \varphi' p' - \varphi' p'] = 0$$

(1) V.: LAGUERRE. *Oeuvres*. II. t.

y por ser $\varphi$ y $f$ necesariamente irreductibles, indicando con $x_{n,i}$ los ceros del polinomio $f$ tendremos:

$$pf'' + qf' = 0 \quad \text{para} \quad x = x_{n,i} \quad (i = \overline{1, n})$$

pero siendo el primer miembro un polinomio de grado $n$ será:

$$pf'' + qf' = k_n f$$

con $k_n$ una constante tal que:

$$k = n\left[q' + \frac{n-1}{2}p''\right]$$

luego, los denominadores de las reducidas $n$ — ésimas del desarrollo de $\Phi(x) = e^{\int \frac{q-p'}{p}dx}$ en fracción continua, verifican también la ecuación diferencial:

$$p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} - n\left[\frac{dq}{dx} + \frac{n-1}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\right]y = 0$$

Pero esta ecuación permite, como hemos visto, explicitar su solución que es parte del problema encarado. Se tendrá, pues:

$$f = e^{-\int \frac{q-p'}{p}dx}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\int \frac{q-p'}{p}dx}\,p^n\right] \qquad [6]$$

Determinado así el denominador $f$ de la reducida $n$ — ésima, la [5] nos da el numerador correspondiente, teniéndose:

$$\varphi = c\Phi f\int \frac{dx}{p\,.\,f^2\Phi}$$

lo que resuelve el problema.

La [6] y lo visto anteriormente nos muestra que para las $\Phi(x)$ de $P$ los denominadores de las reducidas de sus desarrollos en fracciones continuas son polinomios ortogonales con la misma función $\Phi(x)$ [1].

Podría a este respecto demostrarse que las ecuaciones diferenciales del tipo

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q_1(x)\frac{dy}{dx} - n\left[\frac{dq_1}{dx} + \frac{n-1}{2}\frac{d^2p_2}{dx^2}\right]y = 0 \qquad [E]$$

[1] Para otros métodos, que son los corrientes, v. C. JORDAN, 1° y 2° t., o nuestro: Sobre la repres, de una func. de var, real, etc. loc. cit.

que para $p_2$ y $q_1$, polinomios de grado no mayores que dos y uno especialmente y $n$ entero positivo dan un polinomio ortogonal $n$ — ésimo con la función

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{q - p'}{p}$$

en el intervalo $(a\,,b)$ tales que $p(a) = p(b) = 0$

tiene esta propiedad como característica en general, es decir, que sea o no $n$ un entero positivo, las soluciones dan una sucesión de polinomios o funciones ortogonales.

La demostración correspondiente no implica la explicitación como los hemos hecho para $n$ entero positivo, de la solución para los otros casos y que más adelante abordaremos.

Consideremos las dos ecuaciones.

$$p\,y'' + q\,y' - r_1\,y = 0$$

$$p\,y'' + q\,y' - r_2\,y = 0 \qquad \text{con } r_1 \neq r_2$$

Indiquemos con $F_1$ y $F_2$ dos soluciones correspondientes. Se tendrá:

$$r_1 F_1 = p\,F_1'' + q\,F_1' = L(x)$$

$$r_2 F_2 = p\,F_2'' + q\,F_2' = M(x)$$

Sea $$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q - p'}{p}\ ;$$

multiplicando por $\varphi(x)$ y $F_2$ y $F_1$, respectivamente; integrando entre $a$ y $b$ y restando, se tiene:

$$(r_1 - r_2)\int_a^b \varphi F_1 F_2\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,L(x)\,F_2\,dx - \int_a^b \varphi M F_1\,dx$$

Pero:

$$\int_a^b \varphi L F_2\,dx = \left| \varphi p F_2 F_1' \right|_a^b - \int_a^b \varphi p F'_1 F'_2\,dx$$

y análogamente:

$$\int_a^b \varphi M F_1\,dx = \left| \varphi p F_1 F_2' \right|_a^b - \int_a^b \varphi p F_2' F_1'\,dx$$

Luego, y siempre que $F_1$ y $F_2$ y sus primeras derivadas estén

definidas en $a$ y $b$ se tendrá:

$$(r_1 - r_2)\int_a^b \varphi F_1 F_2 \, dx = 0$$

y de donde, por ser $r_1 \neq r_2$ lo q. q. d.

* * *

Abordemos ahora el estudio de la $[E]$ para $n$ cualquiera.

Recordemos para ello la célebre fórmula de Cauchy para una función holomorfa $\varphi(z)$ definida en un contorno $(c)$ y siendo $x$ un punto (número complejo) interno al mismo.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\varphi(z)}{(z - x)} dz$$

La derivada $n$ — ésima nos da:

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\varphi(z)}{(z - x)^{n+1}} dz. \qquad [7]$$

Sobre estas bases la fórmula explícita de un polinomio ortogonal con $\varphi(x)$ del grupo $P$ que era:

$$X_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\varphi(x)\, p^n(x)]$$

podría escribirse:

$$X_n(x) = \frac{n!}{\varphi(x)\, 2\pi i}\int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z - x)^{n+1}} dz. \qquad [8]$$

Ahora bien, supongamos que $n$ deje de ser un número entero positivo como hasta aquí. La [8] la adoptaríamos en ese caso como una generalización de la derivada, del mismo modo como la integral de Euler.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n+1} dx = \Gamma(n)$$

la tratamos como una generalización de la factorial. Siendo pues $n$ cualquiera, la [8] nos da:

$$y = X_n(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\varphi(x)\, 2\pi i}\int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z - x)^{n+1}} dz \qquad [9]$$

y aquí ya $X_n$, sólo restrictivamente es un polinomio que decimos es una solución de la ecuación $(E)$, con la condición, como veremos, de escoger adecuadamente el camino de integración.

La prueba implicará para $n$ entero positivo una confirmación de lo ya visto y en los demás casos una generalización de la anterior fórmula generalizada de O. Rodrigues.

Calculando $y'$ e $y''$ en la [9] y recordando que $\varphi' p = \varphi (q - p')$ se tiene:

$$y' = \frac{\Gamma (n+1)}{2 \pi i \varphi (x)} \int_{(c)} \frac{\varphi (z) p^n (z)}{(z-x)^{n+2}} \left[ n + 1 - (z-x) \frac{q-p'}{p} \right] dz$$

$$y'' = \frac{\Gamma (n+1)}{2 \pi i \varphi (x)} \int_{(c)} \frac{\varphi (z) p^n (z)}{(z-x)^{n+3}} \left[ (n+1)(n+2) - \right.$$

$$\left. - 2 (n+1) \frac{q-p'}{p} (z-x) + \left( q \frac{q-p'}{p^2} + \frac{p''-q'}{p} \right) (z-x)^2 \right] dz.$$

y sustituyendo en $E$ se tiene:

$$E_2 = \frac{\Gamma (n+2)}{\varphi (x) 2 \pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi (z) p^n (z)}{(z-x)^{n+3}} \left[ (n+2) p (x) - (z-x) \{ q (x) - \right.$$

$$\left. - 2 p' (x) \} - (z-x)^2 \{ q' (x) - p'' (x) + \frac{n}{2} p'' (x) \} \right] dz$$

y teniendo presente que $p (x)$ y $q (x)$ son polinomios de grado no mayores que 2 y 1 respectivamente, la expresión anterior puede escribirse:

$$- E_2 = \frac{\Gamma (n+2)}{\varphi (x) 2 \pi i} \int_{(c)} \frac{d}{dz} \left[ \frac{\varphi (z) p^{n+1} (z)}{(z-x)^{n+2}} \right] dz \qquad [9']$$

ahora bien, este segundo miembro será nulo, de consiguiente:

$$\frac{\Gamma (n+1)}{\varphi (x) 2 \pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi (z) p^n (z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

será solución de $E_2$ si el contorno $(C)$ lo fijamos en tal modo que la función:

$$J (z, x) = \varphi (z) p^{n+1} (z) (z-x)^{-n-2} \qquad [10]$$

partiendo de un punto de $(C)$ recorra este circuito recobrando su valor inicial. Si en cambio partimos de la [9], interpretando a $(C)$ no necesariamente como un contorno cerrado, obligada interpreta-

ción para deducirla de la fórmula de Cauchy, sino que tomamos.

$$y = \frac{\Gamma(n+1)}{\varphi(x)\ 2\pi i} \int_{(L)} \frac{\varphi(z)\ p^n(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz$$

siendo $[L]$ un cierto camino en el plano de la $z$ para que ésta sea una solución de la $E_2$ basta con que la $J(z, x)$ definida por la [10] se anule en los extremos de $L$, el cual camino, no pasando $L$ por $x$, daría lugar a una integral curvilínea de una función holomorfa, o sea, dependiente sólo de los extremos, que puedo escoger, para obtener el anulamiento, en las mismas raíces de $p(x) = 0$.

En el caso en que la ecuación $E_2$ es la:

$$(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - n(n+1)\,y = 0 \qquad [11]$$

$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{0}{x^2-1}$, luego $\varphi$ = constante; $a = -1$; $b = 1$ y si $n$ es entero la solución $y_1 = X = c_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ con $c_n = \frac{1}{2^n\, n!}$ son exactamente los polinomios de Legendre y la solución [9] para este caso y cualquiera sea $n$ será:

$$y_1 = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i\, 2^n\, \Gamma(n+1)} \int_{(c)} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz \qquad [12]$$

y por la [9′] al sustituir en la anterior ecuación diferencial tendremos que la correspondiente $J(z, x)$ será:

$$J(z\,.\,x) = (z+1)^{n+1}\,(z-1)^{n+1}\,(z-x)^{-n-2}$$

Indicando con $O_\alpha$ el resultado de la operación de un giro completo alrededor de un cierto punto $\alpha$ se tendrá:

$$O_x\, J(zx) = J(zx)\, e^{-2n\pi i}$$

$$O_1\, J(zx) = J(zx)\, e^{2n\pi i}$$

Luego.

$$O_x\,.\,O_1\, J(zx) = J(zx)$$

Luego el camino $(C)$ deberá ser tal que excluya al punto $-1$ incluyendo a $x$ y $+1$ o excluya a $+1$ incluyendo a $x$ y $-1$.

La integral [12] relativa al caso especial de ecuación [11] fué dada por Schläfli [1].

[1] V.: Whittater-Watson. *Modern Analysis.*

Para los restantes casos, si el camino de integración es cerrado, su determinación adecuada resultará de parecidas consideraciones aunque más complicadas por la introducción de $\varphi(z)$ (que en el caso $L_e$ era uno) y de su forma particular, especialmente de la naturaleza entera, fraccionaria o irracional de los exponentes de sus ceros es que se deducirá el contorno $(C)$ conveniente.

Las derivadas logarítmicas de probabilidades $P$ las hemos usado hasta aquí variando algunas veces el aspecto de su escritura.

Fijemos nuestra atención en la forma ya usada:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q - p'}{p}$$

que también integrada nos da:

$$\varphi = \frac{1}{p(x)} e^{\int \frac{q}{p} dx} \qquad [13]$$

Pero siendo $p$ y $q$ polinomios a lo sumo de grados dos y uno respectivamente la [13] nos indica que:

$$F(x) = \int_a^b \varphi(y)\, e^{xy} \,.\, dy$$

es una solución de una ecuación diferencial del tipo de Laplace de segundo orden.

$$(A_0 + B_0 x)\frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 + B_1 x)\frac{dy}{dx} + (A_2 + B_2 x)\, y = 0 \qquad [14]$$

y de la cual la solución $F(x)$ no sería otra cosa que la función generatriz de Cauchy, de la función de probabilidad dada por [13].

Para ello determinemos en base a la [13] los coeficientes $A_0$, $A_1$, $A_2$ y $B_0$, $B_1$, $B_2$ de la [14], existiendo las relaciones:

$$p(x) = B_0 x^2 + B_1 x + B_2$$

$$q(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2$$

y recordando la hipótesis de los grados de $p$ y $q$ y si

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$q(x) = c_0 + c_1 x, \qquad [15]$$

será:

$$B_0 = b_2 \quad B_1 = b_1 \quad B_2 = b_0$$

$$A_0 = 0 \quad A_1 = c_1 \quad A_2 = c_0$$

la ecuación diferencial de Laplace:

$$b_2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (c_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (c_0 + b_0 x)\, y = 0 \qquad [16]$$

tiene por solución a la función generatriz en el sentido de Cauchy de la función de probabilidad $P$, dada por la [13] con $p$ y $q$ definidas por la [15].

La función de Laplace-Gauss era:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{-x}{1}$$

luego es

$$a_0 = b_1 = b_2 = 0 \quad ; \quad a_1 = -1 \quad , \quad b_0 = 1 \quad , \quad a = -\infty \; b = +\infty$$

la obtención de los polinomios ortogonales con $\varphi(x)$ aplicando la [1] daban:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

Estos polinomios $H_n(x)$, de Hermite, verificarán, pues, la ecuación $E_2$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n\, y = 0$$

y la función característica de Cauchy, de la función $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$, verificará la ecuación diferencial [14], y teniendo en cuenta los valores de las $A$ y $B$ arriba calculadas, en este caso tendremos:

$$-\frac{dy}{dx} + x\, y = 0 \quad \text{que nos da, integrando:} \quad y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

resultado ya antes obtenido por otras vías.

Consideremos por un momento la ecuación de Bessel:

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\gamma}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\gamma = 0$$

que haciendo, como es sabido, la sustitución. $\gamma = x^n \cdot y$ se transforma en la:

$$B = x \frac{d^2y}{dx^2} + (2n + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

la cual cae dentro del grupo de las ecuaciones de Laplace. Aplicándole el procedimiento corriente, tenemos:

$$y = \int_{(L)} F(z)\, e^{zx} \cdot dz$$

y reemplazando en la $B$:

$$B = \int_{(L)} F(z)\, e^{zx} [(2n + 1) z + (z^2 + 1) x]\, dz$$

y como:

$$\int_{(L)} F(z)\, e^{zx} (z^2 + 1)\, x dz = (F(z)\, (z^2 + 1)\, e^{zx})_{(L)} -$$

$$- \int_{(L)} e^{zx} \frac{d}{dz} \{F(z)\, (z^2 + 1)\}\, dz$$

$$(F(z)\, (z^2 + 1)\, e^{zx})_{(L)} = 0 \qquad [18]$$

basta con tomar $F(z)$ tal que

$$(2n + 1) z \quad F(z) - \frac{d}{dz} \{F(z)\, (z^2 + 1)\} = 0$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{(2n - 1) z}{z^2 + 1} \; ; \quad F(z) = (z^2 + 1)^{n - \frac{1}{2}}$$

La condición [18] se verifica si $L$ une los puntos $-i$ y $+i$, y la solución [17] es entonces:

$$y = \int_{-i}^{+i} (z^2 + 1)^{n - \frac{1}{2}} \cdot e^{zx} \cdot dz$$

y haciendo: $$z = i\, t$$

se tiene:

$$y = \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{n - \frac{1}{2}}\, e^{ixt} \cdot dt \qquad [19]$$

prescindiendo del factor $i$.

También, por ser:

$$e^{ixt} = \cos x\,t + i \operatorname{sen} xt$$

y el seno impar, queda la conocida fórmula:

$$y = \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos x\,t \,.\, d\,t \,.$$

Como $(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}$ es solución de $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \dfrac{(1-2n)\,t}{1-t^2}$ la [19] nos dice que la solución de una ecuación de Bessel es la función característica, en el sentido de Levy de la función $P$ que determina los polinomios ultraesféricos o en particular $\left(\text{para } n = \dfrac{1}{2}\right)$ de Legendre.

Resumiendo. De una función $\varphi(x)$ del grupo $P$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q - p'}{p} \qquad q = c_0 + c_1 x$$

$$p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad \text{con} \quad p(a) = p(b) = 0,$$

deducíamos la sucesión de polinomios clásicos

$$X_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\varphi(x)\, p^n(x)]$$

los cuales nos conducen a las ecuaciones diferenciales

$$p\,y'' + q\,y' - n\left[q' + \frac{n-1}{2}\,p''\right] y = 0$$

y en general una solución particular será:

$$y = \frac{1}{\varphi(x)} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz.$$

Los polinomios $X_n(x)$ son los denominadores de las reducidas $n$ — ésimas del desarrollo en fracción continua de $\varphi(x)$.

La función característica de $\varphi$ es solución de la ecuación

$$b_2 x\, y'' + (c_1 + b_1 x)\, y' + (c_0 + b_0 x)\, y = 0$$

pero la función característica de $\varphi(x)$ es:

$$\psi(t) = \int_a^b \varphi(t)\, e^{tz} \,.\, dt = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \ldots$$

siendo $\alpha_n = \int_a^b \varphi(x)\, x^n dx$. Pero los $\alpha_n ; n = 0, 1, 2 \ldots$ por ser $\varphi(x)$ del grupo $P$ recurren, verificando la ecuación a diferencias finitas $R$.

Estas consideraciones bastan para evidenciar cómo el problema de la sumación de series divergentes se liga estrechamente con el de los momentos. Pero más especialmente este ligamen resulta no en el sentido de la sumación como la desarrollada por Cesaro, o sumación por medias aritméticas, y ni tampoco por el método exponencial del señor Borel, sino más bien en el sentido de la determinación de la función generatriz de la serie, idea que nos parece se inicia con Laplace y que aparece en las investigaciones modernas con un estudio profundo y particular realizado por Laguerre y luego extendido por las investigaciones célebres de Stieljes donde reaparecen las principales jornadas del teorema de los momentos que sentara Tchebycheff.

En el método de Cesaro dada la serie.

$$u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

y definidas las sumas parciales según las.

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n$$

se adopta como suma $S$, si existe, el $\lim_{n=\infty} \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$ en correspondencia con la idea de media aritmética. Desgraciadamente, como lo señala el señor Borel, esta generalización no alcanza a resolver el problema de series, como, por ejemplo.

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots$$

que veremos cómo sumamos de acuerdo a simples consideraciones de momentos. En su generalización el señor Borel hace intervenir la serie asociada

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1!} + \frac{u_2 a^2}{2!} + \ldots + \frac{u_n a^n}{n!} + \ldots$$

que resulta de ponderar cada término de la dada y adoptando como suma el valor.

$$S = \int_0^\infty u(a)\, e^{-a} . da . \qquad [20]$$

La ponderación exponencial del señor Borel da cuenta sólo de un grupo de series especiales. Se sabe cómo su autor ha basado su método en originales concepciones sobre los modos de crecimiento y es precisamente que se debe a ello la razón del éxito y del grupo relativo de la sumación exponencial. En efecto, la fórmula [20] es el resultado de haber partido de la definición de valor medio ponderando los términos de la serie constituída con las sumas parciales de la dada, o sea.

$$S(a) = S_0 + \frac{S_1 a}{1!} + \frac{S_2 a^2}{2!} + \ldots + \frac{S_n a^n}{n!} + \ldots$$

de donde, con Borel:

$$\frac{d}{da}\left[e^{-a} \cdot S(a)\right] = e^{-a}\left[S'(a) - S(a)\right] = e^{-a} u_1(a)$$

siendo.

$$u_1(a) = S'(a) - S(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1!} + \frac{u_3 a^2}{2!} + \ldots$$

luego suponiendo que $\lim_{a=\infty} e^{-a} S(a) = S$

$$\int_0^\infty e^{-a} u_1(a)\, da = \left[e^{-a} S(a)\right]_0^\infty = S - u_0$$

de donde, integrando por partes, la [20].

Ahora bien, estos métodos de sumación no son extraños a la forma de variación de $S_n$ y concordantes con una verdadera interpretación de la teoría de las medias (1), siendo la variación de ellas la que, imponiendo un tipo adecuado de media orientará los métodos a desarrollar para cada grupo de formas de crecimiento. No obstante, prescindiremos de considerar la cuestión en este artículo el cual va formando su unidad a través del hilo conductor de los momentos, ideas éstas que deberíamos abandonar por un momento en el caso de continuar las reflexiones anteriores. Concretemos, pues, nuestra atención a las series de las formas.

$$D \sim d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_n x^n + \ldots \qquad [I]$$

$$\frac{e_0}{x} + \frac{e_1}{x^2} + \frac{e_2}{x^3} + \ldots + \frac{e_n}{x^{n+1}} + \ldots \qquad [II]$$

(1) V.: C. Dieulefait. *Sobre los valores medios.* En estos Anales. 1930.

Las del tipo I sugieren naturalmente la comparación con una función generatriz, característica de una función a determinar $\varphi(x)$:

$$\psi(t) = \int_a^b \varphi(x)\, e^{tx}\, dx = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{n!}x^n + \ldots$$

en la que $\varphi(x)$ puede ser del grupo $P$ o de $P$ generalizado o límite de un caso general $P$ como en el problema general trascendente, al principio de estas líneas mencionado. Ello resultaría efectivamente si, haciendo en [I] $\alpha_n = n!\, d_n$ [21] la recurrencia que existiera entre estos $n!\, d_n$ fuese del tipo $R$. o $R$ generalizado. En tal caso la [21] nos daría la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ y con ella, supuesta la recurrencia de $R$ de un orden finito $k$ — ésimo, los $\alpha$ nos darían la $\varphi(x)$ por la relación

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{q - p'}{p}$$

siendo $p$ un polinomio de grado $k - 1$ y $q$ uno de grado $k - 2$. Luego siendo $a$ y $b$ dos ceros del polinomio $p(x)$ tendríamos:

$$D = \int_a^b \varphi(y)\, e^{yx} \,.\, dy\,.$$

Si en cambio consideramos la serie II ella puede pensarse como generada por la función

$$\int_a^b \frac{\varphi(z)}{x \pm z}\, dz = \int_a^b \varphi(z)\left[\frac{1}{x} \mp \frac{z}{x^2} + \frac{z^2}{x^3} \mp \ldots\right] dz =$$

$$= \frac{\alpha_0}{x} \mp \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{x^3} \mp \ldots$$

y se repetirían aquí las consideraciones anteriores. Es precisamente este último el tipo considerado por Stieljes y son condiciones para la existencia de $\varphi(z)$ las $(S)$ que deben verificar las $\alpha$ como hemos visto al referirnos al método de Tchebycheff.

Consideremos la serie:

$$E(x) \sim 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

que para $x = 1$ da la conocida serie oscilante llamada euleriana.

Tomando $\alpha_n = (-1)^n\, n!$ se deduce: $\alpha_{n+1} + (n+1)\,\alpha_n = 0$ que

es del tipo $R$ y nos conduce a:

$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{x} = 1$. $\varphi(x) = e^x$; $x$ variando entre 0 y $-\infty$ que son las raíces de $p = x$.

Luego

$$E(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{y(1+x)}\, dy$$

de donde, la euleriana:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \int_{-\infty}^{0} e^{2y} \cdot dy = \frac{1}{2}$$

resultado concordante con los conocidos razonamientos de Leibnitz basados en la probabilidad y contenidos en el método de Césaro.

Habíamos dicho que según Borel escapaba de este último método la serie:

$$C(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots \quad \text{para } x = 1.$$

Se tendrá aquí:

$$\alpha_n = n!\,(-1)^n\, 2^n$$

lo que da.

$$\alpha_{n+1} + 2(n+1)\,\alpha_n = 0$$

también recurrencia del tipo $R$, la cual nos conduce a:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

y como $p(x) = 2x \quad a = 0 \quad b = -\infty$

siendo $\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

Luego $C(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{1}{2}y} \cdot e^{xy}\, dy$

y para $x = 1$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{3}{2}y} \cdot dy = \frac{1}{3}$$

Consideremos por último la conocida serie geométrica:

$$G(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

cuya función generatriz es, evidentemente, $\frac{1}{1-x}$. Con los elementos anteriores se tendría: $\alpha_n = n$.

$$\alpha_{n+1} - (n+1)\,\alpha_n = 0$$

de donde:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-x}{x} = -1$$

lo que da $\varphi(x) = e^{-x}$ de donde, $x$ varía entre 0 y $+\infty$.

Luego

$$G(x) = \int_0^\infty e^{-y[1-x]}\,dy$$

y en particular:

$$G(1) = \int_0^\infty dy = \infty$$

que es un punto de evidente divergencia esencial.

# ¿MATEMATICAS O MATEMATICA?

DISERTACION RADIOTELEFONICA [1]

Por JOSE BABINI

Estamos en 1937, exactamente a tres siglos del año en que una imprenta holandesa terminaba de imprimir un libro en francés, cuya influencia en la filosofía y en la matemática, ha sido, por igual, extraordinaria. Ya habréis advertido que me refiero al « Discurso del método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias, además, la dióptrica, los meteoros y la geometría, que son ensayos de ese método », título largo, pero bien explicativo, del primer libro que, sin dar aún su nombre, publicó Renato Descartes.

Influencia bien justificada, pues el « Discurso », que sirve de introducción a los ensayos científicos, muestra, a través de un cuadro en el que se entrelazan íntimamente la vida y las ideas de Descartes, la atmósfera cultural de una época de transición y expone las concepciones que han de caracterizar una nueva era: la Edad Moderna, de la cual Descartes es uno de sus primeros voceros. Por otra parte el último de los ensayos: la geometría, marca una época en el desarrollo de la matemática, pues con él se crea una nueva rama de esta ciencia y se introducen en ella conceptos fundamentales.

Traigo este recuerdo de tercer centenario, no solo como un homenaje al gran pensador francés, sino también porque Descartes algo tiene que ver con el tema que dentro del brevísimo tiempo disponible, me propongo desarrollar y que, a pesar del título, no es un simple juego de palabras o una mera cuestión gramatical.

Es un hecho de observación diaria, que para designar ese conjunto de conocimientos de aritmética, álgebra, geometría, análisis, que constituye objeto de estudio o de investigación, se utilizan indistintamente dos vocablos. Algunos dicen matemáticas, en plural, otros decimos matemática, en singular. Por de pronto podría alegarse a

(1) Propalada el 21 de julio de 1937.

favor de esta última denominación, una razón de analogía, pues se dice física, química, biología y no físicas, químicas, biologías; pero esta razón, sin duda convincente, dejaría sin explicación el uso tan frecuente y generalizado del vocablo en plural en la ciencia matemática y solamente en ella. Es que en realidad, detrás de las bambalinas de este asunto aparentemente baladí, viven una serie de cuestiones históricas y científicas cuya consideración, espero, me ayudará a salvar el obstáculo que representa una disertación radiotelefónica sobre una ciencia tan abstracta como la matemática.

Si queremos remontarnos al origen de la ciencia matemática debemos situarnos en el siglo VI antes de C., en pleno florecimiento de la cultura helénica, cuando la escuela pitagórica elaboraba, en estrecha e íntima unión y comunión, ciencia y filosofía. Fueron los pitagóricos los que bautizaron con el nombre de matemática, vale decir ciencia por excelencia, un conjunto de conocimientos ordenados que, por razones vinculadas a su sistema metafísico, englobaba la aritmética, la geometría, la música y la astronomía.

De todas esas ramas fué la geometría la que avanzó más rápidamente; prueba de ello es la inmortal obra de Euclides, aparecida dos siglos después, y en la que bajo el nombre de « Elementos » se exponen, en 13 libros, los conceptos fundamentales y los teoremas elementales de la geometría, incluyendo también las propiedades conocidas de los números, expresadas en lenguaje geométrico. Si, pagando tributo a las exigencias lógicas actuales, reformamos convenientemente los fundamentos de esa geometría, todo el edificio euclídeo, verdadero monumento científico, rivaliza y sobrepasa en rigor y construcción científicos a muchos tratados modernos. Esta persistencia de los teoremas matemáticos, que se mantienen inconmovibles desde hace más de 20 siglos es una característica de la ciencia matemática, que la distingue de las demás ciencias y le confiere notas propias.

Por su parte la astronomía, y su útil matemático: la geometría esférica, se desarrollaba independientemente mientras surgían, por obra del genio griego, otras ramas de la ciencia, que por su índole especial se prestaban a ser construídas con el mismo rigor y método deductivo de la geometría, tales como la Optica geométrica debida a Euclides, la Estática e Hidroestática, debidas a Arquímedes. Todas estas ramas científicas son las que un milenio y medio después exhumará el Renacimiento, en su búsqueda afanosa del saber antiguo; a ellas se agregará una nueva rama, que viene del Oriente, pero no es griega; es el « álgebra », ciencia aparentemente distinta

a la geometría antigua y a las ramas de la Física geometrizada por los griegos.

Se explica entonces como a ese conjunto un poco abigarrado de conocimientos a los que, a pesar de su evidente parentesco, no podía conferírsele un carácter unitario, se le designara con el nombre: « Las Matemática », en plural. Así aparece también en Descartes cuando juzga y critica sus estudios escolares. Pero Descartes destaca de ese conjunto de conocimientos el álgebra y la geometría, a las que asigna un valor especial, y es precisamente sobre esas ramas y la lógica que funda sus célebres cuatro principios metódicos, pretendiendo haber reunido con ellos las ventajas de esas ramas, sin tener sus defectos.

Con ayuda de su método, Descartes se propone luego edificar una ciencia única con la cual pretende explicar, con raciocinios tan claros y evidentes como los teoremas geométricos y las propiedades algebraicas, todas las cosas del cielo, de la tierra, de las plantas y los animales, y entonces denomina esa ciencia « Matemática », ahora en singular, restituyendo al vocablo todo su valor etimológico y reservando para las « Matemáticas » el papel de envoltura de aquella ciencia universal, pues Descartes ve en ellas más un método que una ciencia en sí.

Pero esta tentativa grandiosa de instaurar una matemática universal, que con otro criterio renueva poco después Leibniz, no prospera y en su lugar aparece, como estudio científico de los fenómenos naturales la llamada Filosofía natural. El uso del término matemáticas se mantendrá, y hasta aparecerá poco después más justificado aún, pues se le incorporará nuevas ramas de la Física, construídas, no ya geométricamente, sino con el recurso matemático elaborado durante el siglo XVIII: el análisis infinitesimal. Son ellas la mecánica analítica, la mecánica celeste, las distintas teorías y doctrinas de la Física matemática. (El hecho de que en el establecimiento de estas nuevas ramas contribuyeron en gran medida sabios franceses: Lagrange, Laplace, Fourier, explica quizás la circunstancia de ser los autores franceses los que más persisten actualmente en la designación injustificada de « Matemáticas »).

Pero, a principios del siglo pasado, ocurrió un suceso de suma importancia para la matemática y de valiosas consecuencias para las demás ciencias. Se descubrieron las llamadas geometrías no euclidianas, descubrimiento que dió lugar a una revisión de los conceptos fundamentales de la matemática, de la que surgió concluyentemente que la matemática es una ciencia única, con método y

finalidad propios, y que no existe razón alguna para que albergue en su seno ramas de la Física ni para mantener el papel de doncella de la filosofía natural como lo fuera durante los siglos anteriores. Proclamada su autonomía, su unidad y su independencia respecto a la física, ya no se justifica pues la denominación anticuada de Matemáticas y sí, en cambio, la de Matemática, sin dar por supuesto al vocablo la pretenciosa acepción de los pitagóricos o de Descartes.

Después del advenimiento de la geometría no-euclidiana, la matemática se comportó un poco como un hombre, que al salir de la cárcel siente la necesidad de proclamar su libertad, cometiendo actos excesivos. Arrogante y un poco en tono de desafío, se puso a elaborar teorías, las más alejadas posible de las aplicaciones de la física: nacieron así otras geometrías extrañas, los espacios de cuatro, cinco, *n*, infinitas dimensiones, el cálculo diferencial absoluto, los números imaginarios, complejos, hipercomplejos, etc.

Pero la ciencia tiene también sus sorpresas. En efecto la física contemporánea se caracteriza precisamente por el uso desmesurado de toda esa matemática elaborada últimamente, que une a sus caracteres de abstracción, los de no ser intuitiva y de estar completamente desprovista de referencias a nuestras imágenes sensoriales, y, por eso, al parecer, absolutamente desvinculada del mundo exterior. Este hecho, que caracteriza a la física de hoy, distinguiéndola de la física clásica, ha planteado a la ciencia y a la filosofía una serie de nuevos problemas y ha conferido a la física una fisonomía tal que ha inquietado a más de un físico. Otros físicos, en cambio, ven en él un síntoma de lozanía y de fecundidad, un signo más del valor espiritual de la ciencia.

# LA ESTRUCTURA DE LOS ESPECTROS Y LAS LINEAS ÚLTIMAS

Por el Dr. ADOLFO T. WILLIAMS

ABSTRACT

Spectral Structure and « raies ultimes ». — In this paper, complementary of others already published are described the Spectral terms and electronic configuratións which originated « raies ultimes ». Gotrian's diagrams are also included.

1. Introduccion. — Los progresos realizados en los últimos años en el estudio de los espectros atómicos nos han permitido completar nuestras investigaciones anteriores (1) y clasificar así, en sus respectivas series, la casi totalidad de las líneas últimas, lo que permite conocer los términos espectrales y las configuraciones electrónicas que les dan origen. Nos ha sido de gran utilidad para establecer los cuadros y los diagramas la obra de Bacher y Goudsmit (2).

2. Reglas de combinación de los términos. — Las reglas de combinación de los términos, llamadas reglas de selección o de transición y que tienen aplicación en el caso de las líneas últimas, son las siguientes:

*a*) Sólo son posibles las transiciones entre un término par y uno impar. Son términos pares e impares, respectivamente, aquellos

(1) *A. S. C. A.*, 97, página 15 (1924); 114, página 261 (1933); 118, página 88 (1934); 119, página 55 (1935). *Contribución al estudio de las ciencias. Serie matemático-física*, 4, página 359 (1928); 5, página 173 (1929). *Comptes rendus*, 187, página 761 (1928); 193, página 358 (1931); 200, página 230 (1935); 199, página 1201 (1934). *Nature*, 124, página 985 (1929), y 130, página 313 (1932). *Physikalische Zeitschrift*, 33, página 157 (1932).

(2) *Atomic Energy States.* — Mac Graw-Hill, New York, 1932.

para los cuales se verifica una u otra de las siguientes condiciones:

$$\Sigma l = 2n$$
$$\Sigma l = 2n + 1; \qquad [1]$$

donde $l$ es el momento angular del movimiento orbital del electrón expresado en unidades cuantistas $h/2\pi$; cuando la suma determinada por las expresiones [1] teniendo en cuenta los valores de $l$ de los electrones que dan origen a determinado término son pares o impares, el término es par o impar. Esta regla no vale en el caso de los campos eléctricos perturbadores originados por átomos vecinos o por fuentes externas. Otro caso de violación de esta regla se produce en los espectros de las nebulosas donde la presión es muy pequeña y las colisiones muy escasas.

*b*) Sólo son posibles aquellas transiciones para las cuales la variaciones del momento angular total J cambia así: $+1$, $0$, $-1$; siendo prohibida la transición $J = 0 \rightarrow J = 0$. Esta regla también es violada en los campos magnéticos intensos y en la radiación de las nebulosas.

*c*) Solamente se produce en la emisión el salto de un solo electrón. Esta regla es solamente aproximada porque se producen transiciones originadas por el salto de dos electrones que tienen gran intensidad y persistencia.

*d*) En los espectros complicados las líneas intensas provienen de transiciones entre estados formadas por un estado semejante del ion.

3. Tablas y diagramas. — Las tablas han sido establecidas colocando los elementos (átomos neutros y átomos ionizados) las configuraciones electrónicas y los términos que éstas originan.

En la columna observaciones las anotaciones $2\,e$, $\Delta R = 2$ y $\Delta l = \pm 2$ significa que las líneas últimas provienen del salto de dos electrones o bien para aquellas en las cuales la variación $\Delta R$ y $\Delta l$ es mayor que la unidad.

En cuanto a los diagramas se han dibujado en forma aproximada los valores numéricos de los términos. Además los núcleos funda-

mentales van indicados con círculos llenos; las combinaciones entre términos del mismo valor de L y R que son comunes a los átomos neutros y a los iones correspondientes, de acuerdo con la regla del corrimiento espectroscópico, van unidos con líneas llenas, con líneas de puntos las que no son comunes, y, finalmente, con trazos de puntos y rayas las líneas de intercombinación. Los diagramas de las figuras 1 a 10 corresponden a las tablas I a X, respectivamente.

TABLA I

*Atomos de la primera columna y iones semejantes*

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros H, Li, Na, K, Rb y Cs | $^2S - {}^2P^0$ | $p^6s \longrightarrow p^6p$ | |
| | $^2P^0 - {}^2S$ | $p^6p \longrightarrow p^6s$ | |
| | $^2P^0 - {}^2D$ | $p^6p \longrightarrow p^6d$ | |
| Atomos ionizados Be, Mg, Cu, Sr y Ba | $^2S - {}^2P^0$ | $p^6s \longrightarrow p^6p$ | |
| | $^2P^0 - {}^2S$ | $p^6p \longrightarrow p^6s$ | |
| Mg, Sr, Ca y Ba | $^2P^0 - {}^2D$ | $p^6p \longrightarrow p^6d$ | |
| Ba | $^2D - {}^2F^0$ | $p^6d \longrightarrow p^6f$ | |
| Atomos doblemente ionizados Be, Al, Y y La | $^2S - {}^2P^0$ | $p^6s \longrightarrow p^6p$ | |
| Y y La | $^2D - {}^2P^0$ | $p^6d \longrightarrow p^6p$ | |
| Atomos neutros Cu, Ag y Au | $^2S - {}^2P^0$ | $d^{10}s \longrightarrow d^{10}p$ | |
| | $^2P^0 - {}^2S$ | $d^{10}p \longrightarrow d^{10}s$ | |
| | $^2P^0 - {}^2D$ | $d^{10}p \longrightarrow d^{10}d$ | |
| Atomos ionizados Zg, Cd y Hg | $^2S - {}^2P^0$ | $d^{10}s \longrightarrow d^{10}p$ | |
| | $^2P^0 - {}^2S$ | $d^{10}p \longrightarrow d^{10}s$ | |
| | $^2P^0 - {}^2D$ | $d^{10}p \longrightarrow d^{10}d$ | |
| Atomos neutros Cu y Au | $^2D - {}^2D^0$ | $d^9s^2 \longrightarrow d^9sp$ | |
| | $^2D - {}^2P^0$ | $d^{10}p$ | $2e$ |
| | $^2D - {}^2F^0$ | $d^9sp$ | |
| Au | $^2D - {}^4F^0$ | $d^9sp$ | $\Delta R = 2$ |

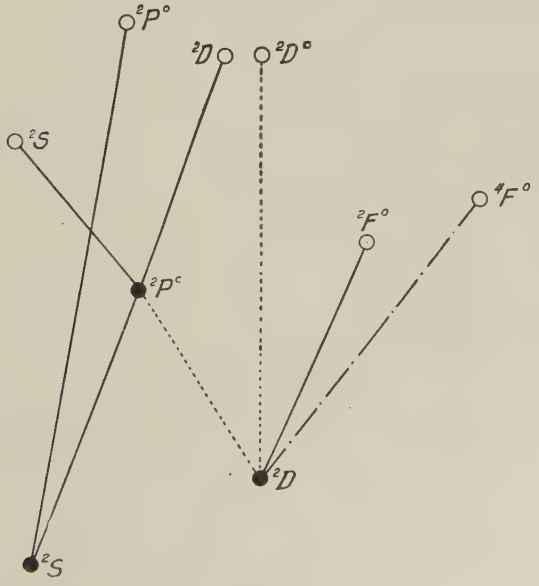


FIG. 1.

TABLA II

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros | $^1S - {}^1P^\circ$ | $p^6s^2 \rightarrow p^6sp$ | |
| Be, Mg, Ca, Br | $^3P^\circ - {}^3P$ | $p^6sp \rightarrow \begin{cases} p^6pp \\ p^6sd \end{cases}$ | |
| y Sr | $^3P^\circ - {}^3D$ | | |
| Mg | $^1S - {}^3P^\circ$ | $p^6s^2 \rightarrow p^6sp$ | $\Delta R = 2$ |
| Be, Mg, Ca | $^3P^\circ - {}^3S$ | $p^6sp \rightarrow p^6ss$ | |
| Ba | $^1S - {}^3D^\circ$ | $p^6s^2 \rightarrow p^6dp$ | $2e$, $\Delta R = 2$; $\Delta L = -2$ |
| Ca | $^3P^\circ - {}^3P$ | $p^6sp \rightarrow \begin{cases} p^6dd \\ p^6sd \end{cases}$ | $2e$ |
| Mg | $^1P^\circ - {}^1D$ | | |
| Ca | $^3D - {}^3D^\circ$ | $p^6sd \rightarrow \begin{cases} p^6pd \\ p^6sp \\ p^6sf \\ p^6pd \end{cases}$ | $\Delta R = 2$ |
| Ba | $^3D - {}^3P^\circ$ | | |
| Ba | $^3D - {}^1F^\circ$ | | |
| Ca | $^3D - {}^3F^\circ$ | | |
| Atomos ionizados B y Al | $^1S - {}^1P^\circ$ | $p^6s^2 \rightarrow p^6sp$ | |
| B | $^1P^\circ - {}^1D$ | $sp \rightarrow p^2$ | |
| Al | $^1P^\circ - {}^1D$ | $p^6sp \rightarrow \begin{cases} p^6sd \\ p^6ss \\ p^6sd \\ p^6ss \end{cases}$ | |
| » | $^1P^\circ - {}^1S$ | | |
| » | $^3P^\circ - {}^3D$ | | |
| » | $^3P^\circ - {}^3S$ | | |
| » | $^1S - {}^3P^\circ$ | $p^6s^2 \rightarrow p^6sp$ | $\Delta R = 2$ |
| » | $^1D - {}^1F^\circ$ | $p^6sd \rightarrow p^6sf$ | |
| Atomos ionizados | | | |
| Y | $^1S - {}^1P^\circ$ | $p^6s^2 \rightarrow \begin{cases} p^6dp \\ p^6sp \\ » \end{cases}$ | $2e$ |
| La, Lu | $^1S - {}^1P^\circ$ | | |
| Lu | $^1S - {}^3P^\circ$ | | $\Delta R = 2$ |
| Y | $^3P^\circ - {}^3D$ | $p^6sp \rightarrow p^6sd$ | |
| Sc, Y, La | $^1D - {}^1P^\circ$ | $p^6d^2 \rightarrow \begin{cases} p^6dp \\ p^6sp \end{cases}$ | |
| La, | $^1D - {}^1P^\circ$ | | $2e$ |
| Sa, Y, La y Lu | $^1D - {}^1D^\circ$ | $p^6ds \rightarrow \begin{cases} p^6dp \\ » \\ » \\ p^6sp \\ » \end{cases}$ | |
| Sc y La | $^1D - {}^1F^\circ$ | | |
| Y y La | $^1D - {}^3F^\circ$ | | $\Delta R = 2$ |
| Y | $^1D - {}^1P^\circ$ | | |
| La | $^1D - {}^3P^\circ$ | | $\Delta R = 2$ |
| Sc, Y, La y Lu | $^3D - {}^3F^\circ$ | $p^6ds \rightarrow \begin{cases} p^6dp \\ » \\ » \\ » \\ p^6fd \\ p^6dp \end{cases}$ | |
| Sc, Y y La | $^3D - {}^3P^\circ$ | | |
| Y y La | $^3D - {}^1D^\circ$ | | $\Delta R = 2$ |
| Y, La y Lu | $^3D - {}^3D^\circ$ | | |
| La | $^3D - {}^1P^\circ$ | | $\Delta R = 2$ |
| La | $^3D - {}^1F^\circ$ | | $\Delta R = 2$ |
| Y | $^3F - {}^3F^\circ$ | $p^6d^2 \rightarrow \begin{cases} » \\ » \\ p^6fd \\ p^6dp \end{cases}$ | |
| Y | $^3F - {}^3D^\circ$ | | |
| La | $^3F - {}^3G^\circ$ | | |
| » | $^3F - {}^1D^\circ$ | | $\Delta R = 2$ |
| » | $^3F^\circ - {}^1F$ | $p^6fs \rightarrow p^6fs$ | $\Delta R = 2$ |
| Sc e Y | $^1G - {}^1F^\circ$ | $p^6d^2 \rightarrow p^6dp$ | |
| La | $^3G^\circ - {}^3H$ | $p^6fd \rightarrow p^6f^2$ | |

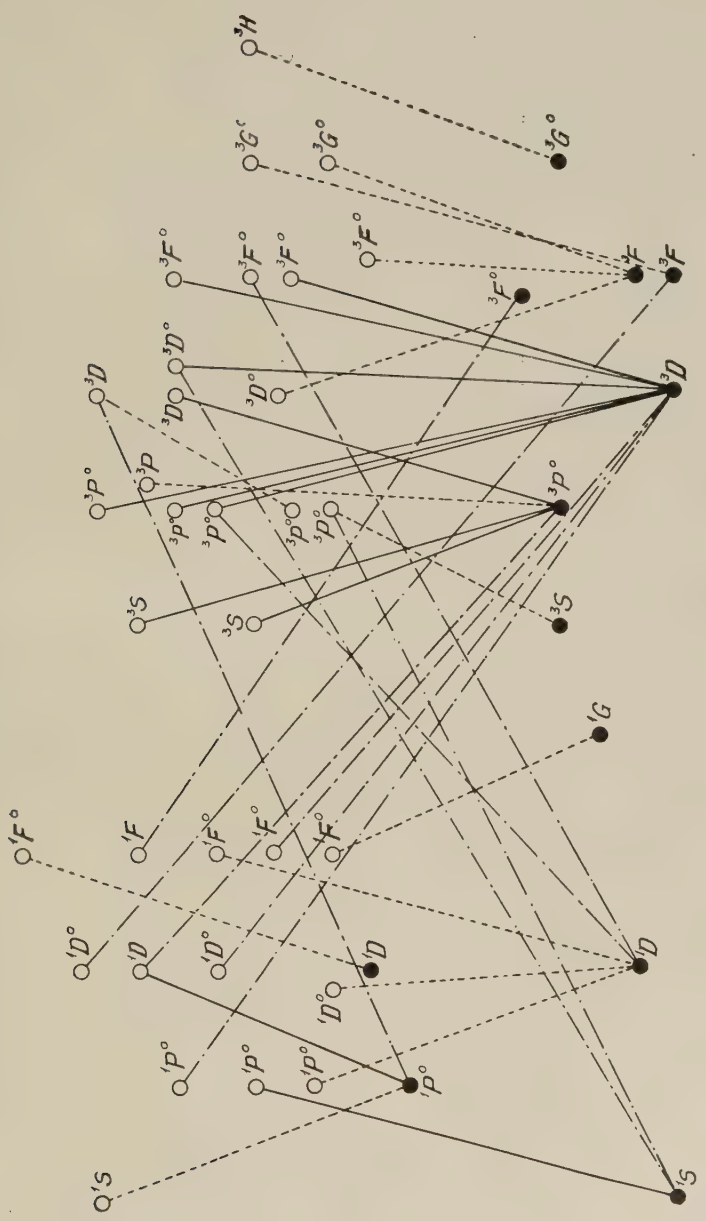
$^3H$
$^3G'$
$^3G^\circ$
$^3G^\circ$
$^3F^\circ$
$^3F^\circ$
$^3F^\circ$
$^3F^\circ$
$^3F^\circ$
$^3F$
$^3F$
$^3D^\circ$
$^3D^\circ$
$^3D$
$^3D$
$^3D$
$^3P^\circ$
$^3P$
$^3P^\circ$
$^3P^\circ$
$^3P^\circ$
$^3P^\circ$
$^3P^\circ$
$^3S$
$^3S$
$^3S$
$^1G$
$^1F^\circ$
$^1F$
$^1F^\circ$
$^1F^\circ$
$^1F^\circ$
$^1D^\circ$
$^1D$
$^1D^\circ$
$^1D$
$^1D^\circ$
$^1D$
$^1P^\circ$
$^1P^\circ$
$^1P^\circ$
$^1P^\circ$
$^1S$
$^1S$

Fig. 2.

## Tabla III

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros | | | |
| B, Al, Ga, In y Tl | $^2P^\circ - {}^2S$ | $s^2p \rightarrow \begin{cases} s^2s \\ s^2d \end{cases}$ | |
| Al, Ga, In y Tl | $^2P^\circ - {}^2D$ | | |
| Tl | $^2S - {}^2P^\circ$ | $s^2s \rightarrow s^2p$ | |
| Atomos ionizados: | | | |
| C y Sn | $^2D - {}^2F^\circ$ | $sp^2 \rightarrow \begin{cases} s^2f \\ s^2p \end{cases}$ | $2e$ |
| C | $^2S - {}^2P^\circ$ | | |
| C | $^2P^\circ - {}^2D$ | $s^2p \rightarrow \begin{cases} sp^2 \\ s^2s \end{cases}$ | |
| Si y Pb | $^2P^\circ - {}^2S$ | | |
| Si y Pb | $^2S - {}^2P^\circ$ | $s^2s \rightarrow s^2p$ | |
| Atomo doblemente ionizado | $^2S - {}^2P^\circ$ | $s^2s \rightarrow s^2p$ | |
| N | $^2P^\circ - {}^2D$ | $s^2p \rightarrow sp^2$ | |
| Atomos neutros: | | | |
| Sc, Y, La y Lu | $^2D - {}^2F^\circ$ | | |
| Sc, Y | $^2D - {}^2D^\circ$ | $ds^2 \rightarrow \begin{cases} dsp \\ » \end{cases}$ | |
| La | $^2D - {}^2D^\circ$ | | |
| Y | $^2D - {}^2P^\circ$ | $\begin{cases} d^2p \\ dsp \end{cases}$ | |
| Sc, Y, La | $^4F - {}^4G^\circ$ | | |
| Sc | $^4F - {}^4F^\circ$ | $d^2s \rightarrow \begin{cases} d^2p \\ » \end{cases}$ | |
| Sc | $^2G - {}^2F^\circ$ | | |
| Atomos ionizados: | | | |
| Ti, Zr y Hf? | $^2D - {}^2F^\circ$ | | |
| Ti y Zr | $^2F - {}^2G^\circ$ | | |
| Ti, Zr y Hf? | $^4F - {}^4G^\circ$ | $d^2s \rightarrow d^2p$ | |
| Ti, Zr y Hf? | $^4F - {}^4D^\circ$ | | |
| Ti y Zr | $^4F - {}^4F^\circ$ | | |
| » | $^4P - {}^4P^\circ$ | | |
| » | $^4F - {}^4D^\circ$ | $d^3 \rightarrow d^2p$ | |
| » | $^2G - {}^2F^\circ$ | | |
| » | $^2G - {}^2G^\circ$ | | |
| Ti | $^2F - {}^2F^\circ$ | | |
| » | $^2F - {}^2D^\circ$ | | |
| » | $^2G - {}^2H^\circ$ | $d^2s \rightarrow d^2p$ | |
| » | $^4P - {}^4S^\circ$ | | |
| » | $^4P - {}^4D^\circ$ | | |
| » | $^2G^\circ - {}^2H$ | | |
| » | $^4F^\circ - {}^4G$ | $d^2p \rightarrow d^2d$ | |
| » | $^4F - {}^4F^\circ$ | | |
| » | $^2H - {}^2G^\circ$ | $d^3 \rightarrow d^2p$ | |
| Zr | $^2P - {}^2S^\circ$ | $d^2p$ | |
| » | $^2D - {}^2D^\circ$ | » | |
| Zr, Hf? | $^2D - {}^2F^\circ$ | » | $\Delta R = 2$ |
| Zr | $^4P - {}^4P^\circ$ | $dsp$ | |
| » | $^4F - {}^2D^\circ$ | $d^2s \rightarrow$ » | $\Delta R = 2$ |
| » | $^4F - {}^2F^\circ$ | $d^2p$ | $\Delta R = 2$ |
| » | $^4F - {}^4D^\circ$ | $dsp$ | |
| » | $^4F - {}^4F^\circ$ | » | |
| » | $^2G - {}^2F^\circ$ | » | |
| » | $^4P - {}^4D^\circ$ | $d^3 \rightarrow dsp$ | $2e$ |
| » | $^4F - {}^4F^\circ$ | $d^3 \rightarrow$ » | $2e$ |

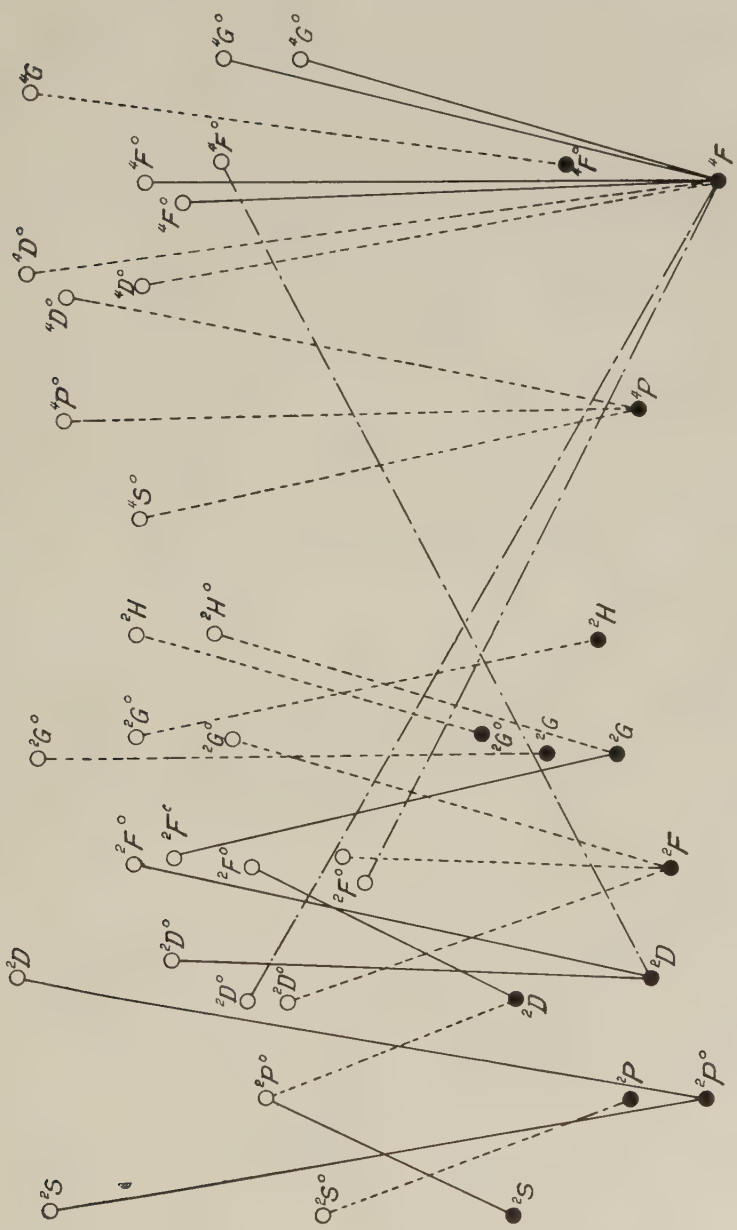
4G°
4G°
4G
4F°
4F°
4F
4F°
4F°
4F
4D°
4D°
4D°
4P°
4P
4S°
2H
2H°
2H
2G°
2G°
2G°
2G
2G
2F°
2F°
2F
2F°
2F°
2F°
2D°
2D°
2D°
2D
2D
2D
2P°
2P
2P°
2S
2S°
2S

Fig. 3.

TABLA IV

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros: | | | |
| C, Si, Ge, Sn, Pb | $^1S - {}^1P^\circ$ | $s^2ps$ | |
| Ge, Pb | $^1S - {}^3P^\circ$ | » | $\Delta R = 2$ |
| Si, Ge, Sn, Pb | $^3P - {}^3P^\circ$ | » | |
| Sn, Pb | $^3P - {}^1P^\circ$ | » | $\Delta R = 2$ |
| Ge | $^3P - {}^3D^\circ$ | $s^2p^2 \rightarrow$ $s^2pd$ | |
| Si, Ge, Sn, Pb | $^1D - {}^1P^\circ$ | $s^2ps$ | |
| Si | $^1D - {}^1D^\circ$ | $sp^3$ | |
| Ge, Sn, Pb | $^1D - {}^3P^\circ$ | $s^2ps$ | $\Delta R = 2$ |
| Atomo ionizado: | | | |
| N | $^3P^\circ - {}^3D$ | $s^2ps \rightarrow s^2pp$ | |
| Atomos neutros: | | | |
| Zr | $^3P - {}^3F^\circ$ | $d^3p$ | $2e$ |
| » | $^3P - {}^3D^\circ$ | » | $2e$ |
| Ti | $^3F - {}^3D^\circ$ | » | $2e$ |
| » | $^3F - {}^3F^\circ$ | $d^2sp$ | |
| Zr, Ti | $^3F - {}^3G^\circ$ | $d^2s^2 \rightarrow$ » | |
| Ti | $^3F - {}^3G^\circ$ | $d^2p$ | $2e$ |
| Zr | $^3F - {}^1D^\circ$ | » | $2e, \Delta R = 2$ |
| Ti | $^3F - {}^3D^\circ$ | $d^2sp$ | |
| Hf | $^3F - {}^3D^\circ$? | | |
| » | $^3F - {}^3F^\circ$? | $d^2s^2 \rightarrow$ ? | |
| » | $^3F - {}^3G^\circ$? | | |
| Ti, Zr | $^5F - {}^5G^\circ$ | | |
| Ti | $^5F - {}^5F^\circ$ | $d^3s \rightarrow d^3p$ | |
| Atomos ionizados: | | | |
| V | $^3G - {}^3H^\circ$ | | |
| » | $^3H - {}^3I^\circ$ | $d^3s \rightarrow$ ? | |
| » | $^5D - {}^5D^\circ$ | $d^2p$ | |
| » | $^5D - {}^5F^\circ$ | $d^4 \rightarrow$ » | |
| » | $^5D - {}^3D^\circ$ | $d^2p$? | $\Delta R = 2$ |
| V y Nb | $^5F - {}^5G^\circ$ | $d^2p$ | |
| V | $^5F - {}^5F^\circ$ | » | |
| » | $^5F - {}^5D^\circ$ | » | |
| Nb | $^5F - {}^5F^\circ$ | $d^3s \rightarrow$ $d^2p$? | |
| » | $^5F - {}^5D^\circ$ | » | |
| V | $^5F - {}^3D^\circ$ | » | $\Delta R = 2$ |

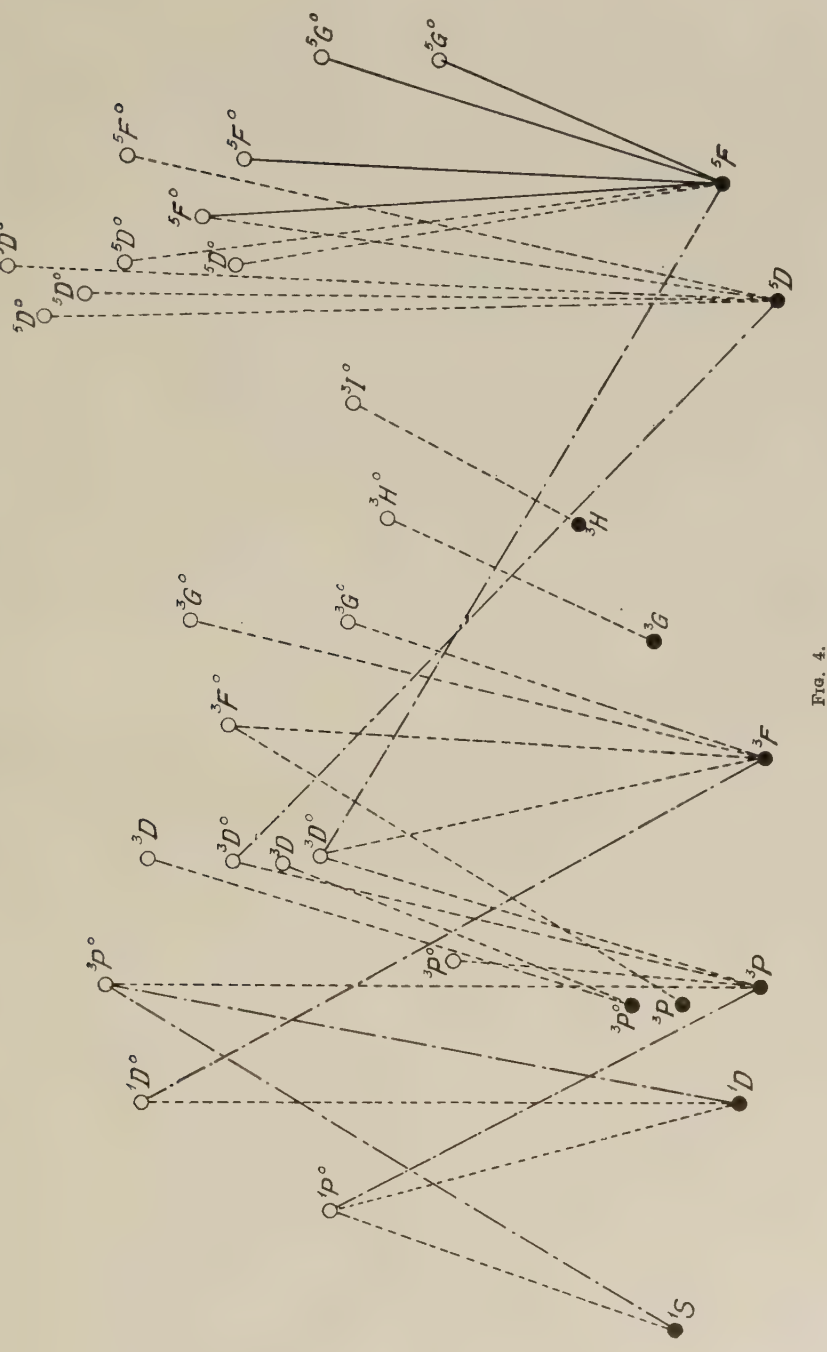
$^5G^\circ$
$^5G^\circ$
$^5F^\circ$
$^5F^\circ$
$^5F^\circ$
$^5F$
$^5D^\circ$
$^5D^\circ$
$^5D^\circ$
$^5D^\circ$
$^5D^\circ$
$^5D$
$^3I^\circ$
$^3H^\circ$
$^3H$
$^3G^\circ$
$^3G^\circ$
$^3G$
$^3F^\circ$
$^3F$
$^3D$
$^3D^\circ$
$^3D$
$^3D^\circ$
$^3P^\circ$
$^3P^\circ$
$^3P^\circ$
$^3P$
$^3P$
$^1D^\circ$
$^1D$
$^1P^\circ$
$^1S$

Fig. 4.

TABLA V

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros: | | | |
| N, P, As, Sb, Bi | $^4S^\circ - {}^4P$ | $s^2p^2s$ | |
| P, As, Sb, Bi | $^2D^\circ - {}^2P$ | » | |
| As, Sb, Bi | $^2D^\circ - {}^4P$ | $s^2p^3 \rightarrow$ » | $\Delta R = 2$ |
| As | $^2P^\circ - {}^2D$ | » | |
| P, As, Sb | $^2P^\circ - {}^2P$ | » | |
| N | $^2P - {}^2D^\circ$ | $s^2p^2s \rightarrow s^2p^2p$ | |
| V | $^6D - {}^6D^\circ$ | $d^4p$ | |
| V | $^6D - {}^6P^\circ$ | $d^4s \rightarrow$ » | |
| V, Nb | $^6D - {}^6F^\circ$ | » | |
| V | $^4F - {}^4G^\circ$ | $d^3sp$ | |
| V | $^4F - {}^4G^\circ$ | $d^3s^2 \rightarrow$ ? | |
| V | $^4F - {}^4D^\circ$ | $d^3sp$ | |
| Atomos ionizados: | | | |
| Cr, Mo | $^6D - {}^6F^\circ$ | $d^4p$ | |
| Cr | $^6D - {}^6P^\circ$ | » | |
| Cr, Mo | $^6D - {}^6D^\circ$ | » | |
| Cr | $^6D - {}^4P^\circ$ | $d^4s \rightarrow$ » | $\Delta R = 2$ |
| Cr | $^6D - {}^4P^\circ$ | ? | $\Delta R = 2$ |
| Mo | $^6D - {}^6P^\circ$ | ? | |

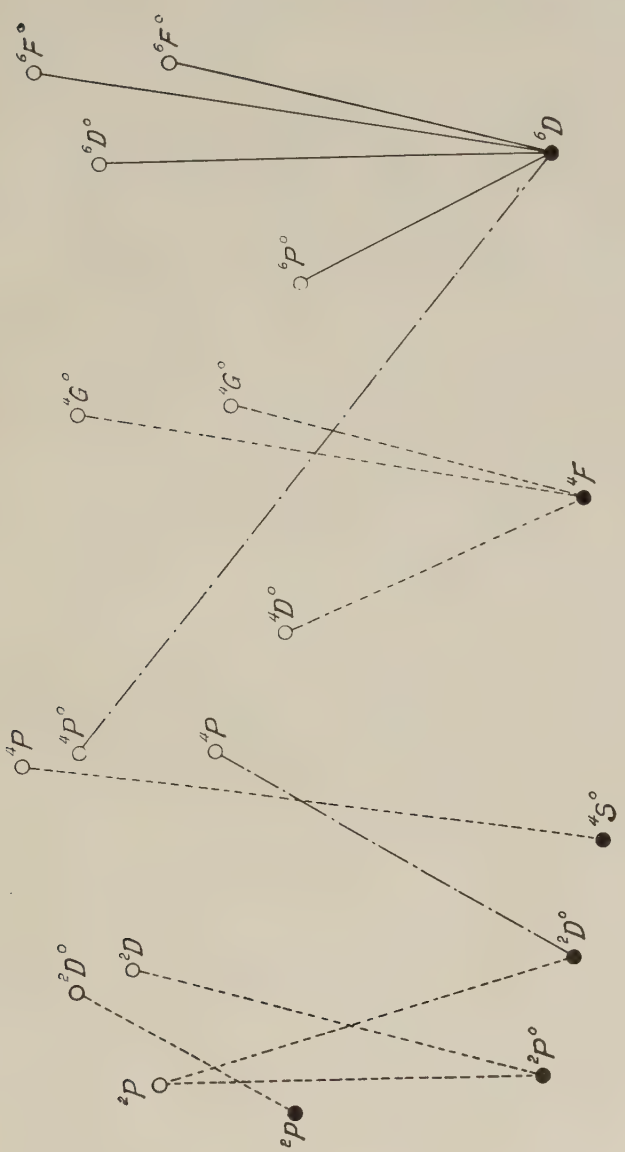
$^6F^\circ$
$^6F^\circ$
$^6D^\circ$
$^6D$
$^6P^\circ$
$^4G^\circ$
$^4G^\circ$
$^4F$
$^4D^\circ$
$^4P$
$^4P^\circ$
$^4P$
$^4S^\circ$
$^2D^\circ$
$^2D$
$^2D^\circ$
$^2P^\circ$
$^2P$
$^2P$

FIG. 5.

TABLA VI

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros: | | | |
| O, S, Se, Te | $^3P - {}^3S°$ | $s^2p^4 \rightarrow s^2p^3s$ | |
| Te | $^3P - {}^5S°$ | $s^2p^4 \rightarrow$ » | $\Delta R = 2$ |
| Te | $^1D - {}^3S°$ | $s^2p^4 \rightarrow$ » | $\Delta R = 2, \Delta L = +2$ |
| O, S, Se | $^5S° - {}^5P$ | $s^2p^3s \rightarrow s^2p^3p$ | |
| Cr, Mo | $^5D - {}^5P°$ | $d^4s^2 \rightarrow d^5p$ | $2e$ |
| Cr | $^5D - {}^5F°$ | $d^4s^2 \rightarrow d^4sp$ | |
| » | $^5D - {}^5P°$ | $d^4s^2 \rightarrow$ » | |
| » | $^5D - {}^5D°$ | $d^4s^2 \rightarrow$ ? | |
| Cr, Mo | $^7S - {}^7P°$ | $d^5s \rightarrow d^5p$ | |
| » | $^5S - {}^5P°$ | $d^5s \rightarrow$ » | |
| Cr | $^5S - {}^5P°$ | $d^5s \rightarrow$ ? | |
| Cr, Mo | $^7S - {}^7P°$ | $d^5s \rightarrow$ ? | |
| Mo | $^5D - {}^5F°$ | | |
| W | $^5D - {}^5F°$ | $d^4s^2 \rightarrow$ ? | |
| » | $^5D - {}^5P°$ | | |
| » | $^7S - {}^7P°$ | $d^5s \rightarrow$ ? | |
| Atomos ionizados: | | | |
| Mn | $^5D° - {}^5P°$ | $d^6 \rightarrow d^5p$ | |
| » | $^5S - {}^5P°$ | $d^5s \rightarrow d^5p$ | |
| » | $^7S - {}^7P°$ | | |
| » | $^7P° - {}^7D$ | $d^5p \rightarrow d^5d$ | |

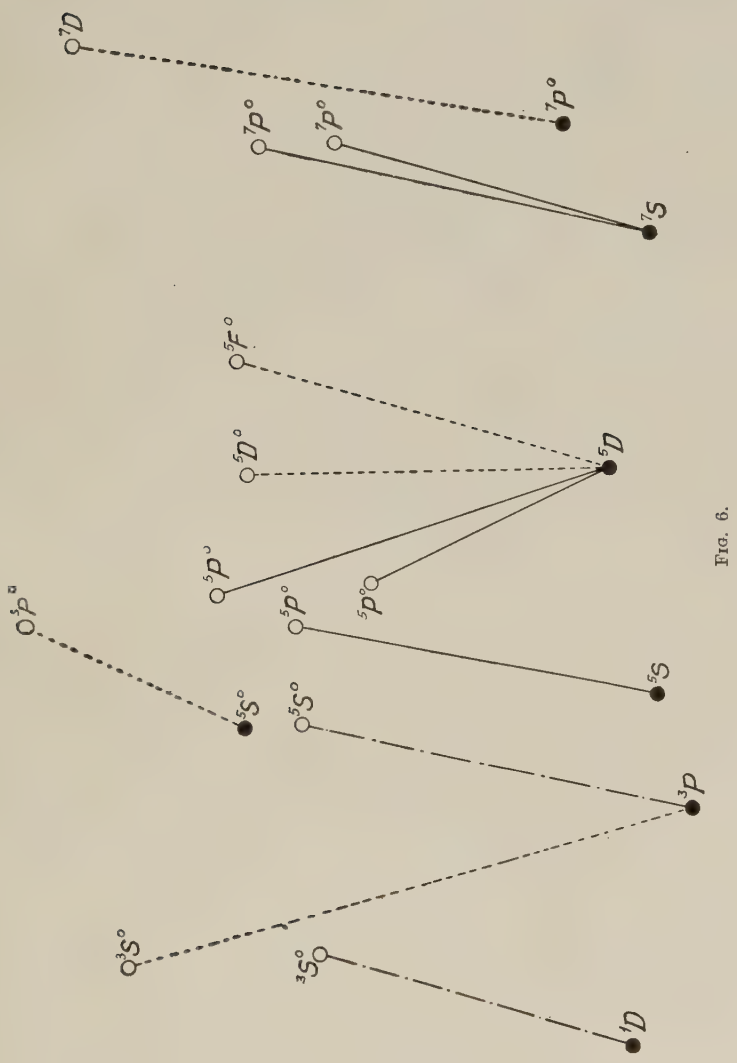
$^7D$
$^7P^\circ$
$^7P^\circ$
$^7P^\circ$
$^7S$
$^5F^\circ$
$^5D^\circ$
$^5D$
$^5P^\circ$
$^5P^\circ$
$^5P^\circ$
$^5S$
$^3P^\circ$
$^5S^\circ$
$^5S^\circ$
$^3P$
$^3S^\circ$
$^3S^\circ$
$^1D$

Fig. 6.

TABLA VII

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros: | | | |
| F | $^4P - {}^4D^\circ$ | $p^4s \longrightarrow p^4p$ | |
| Cl, Br | $^2P^\circ - {}^4P$ | $s^2p^5 \longrightarrow s^2p^4s$ | $\Delta R = 2.$ |
| Mn, Re | $^6S - {}^6P^\circ$ | $d^5s^2 \longrightarrow d^5sp$ | |
| Mn | $^6P^\circ - {}^6S$ | $d^5sp \longrightarrow d^5ss$ | |
| Mn, Re | $^8P^\circ - {}^8S$ | | |
| Mn | $^6D - {}^6F^\circ$ | $d^6s \longrightarrow$ ? | |
| Mn | $^4D - {}^4F^\circ$ | $d^6p$ | |
| Atomos ionizados: | | | |
| Fe | $^4D - {}^4F^\circ$ | | |
| » | $^4D - {}^4D^\circ$ | | |
| » | $^4D - {}^4P^\circ$ | $d^6s \longrightarrow d^6p$ | |
| » | $^6D - {}^6F^\circ$ | | |
| » | $^6D - {}^6D^\circ$ | | |
| » | $^6D - {}^6P^\circ$ | | |
| » | $^4D - {}^4D^\circ$ | $d^7 \longrightarrow d^6p$ | |
| » | $^4F - {}^6F^\circ$ | | $\Delta R = 2.$ |

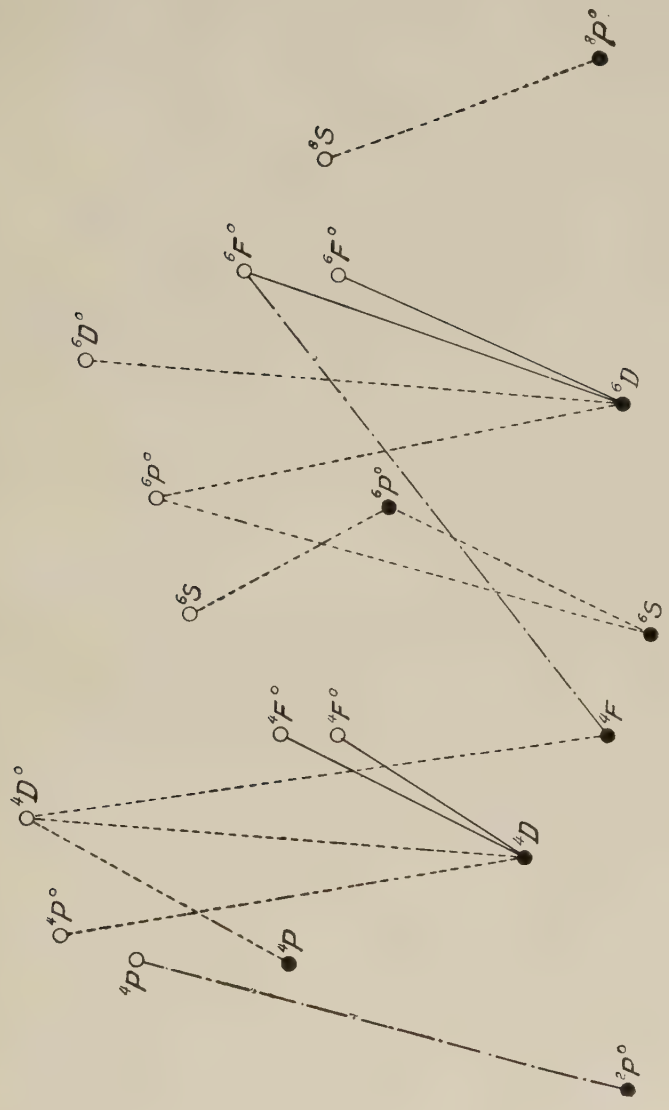
$^8P^\circ$
$^8S$
$^6F^\circ$
$^6F^\circ$
$^6D^\circ$
$^6D$
$^6P^\circ$
$^6P^\circ$
$^6S$
$^6S$
$^4F^\circ$
$^4F^\circ$
$^4F$
$^4D^\circ$
$^4D$
$^4P^\circ$
$^4P$
$^4P$
$^2P^\circ$

FIG. 7.

TABLA VIII

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | | Observaciones |
|---|---|---|---|---|
| Atomos neutros: | | | | |
| Fe | $^5D - {}^5P^\circ$ | | $d^6sp$ | |
| » | $^5D - {}^5D^\circ$ | | » | |
| » | $^5D - {}^5F^\circ$ | $d^6s^2 \longrightarrow$ | » | |
| » | $^5D - {}^5D^\circ$ | | $d^7p$ | $2e$ |
| » | $^5D - {}^5F^\circ$ | | » | $2e$ |
| Fe, Ru | $^5F - {}^5F^\circ$ | | $d^7p$ | |
| Fe, Ru | $^5F - {}^5D^\circ$ | | $d^6sp$ | |
| Fe | $^5F - {}^3G^\circ$ | | $d^7p$ | $\Delta R = 2.$ |
| » | $^3F - {}^5G^\circ$ | $d^7s \longrightarrow$ | » | $\Delta R = 2.$ |
| » | $^3F - {}^3F^\circ$ | | » | |
| » | $^3F - {}^3D^\circ$ | | » | |
| » | $^3F - {}^3D^\circ$ | | $d^6sp$ | |
| » | $^7P^\circ - {}^7D$ | $d^6sp \longrightarrow$ | $d^6ss$ | |
| Ru | $^5F - {}^5G^\circ$ | $d^7s \longrightarrow$ | $d^7p$ | |
| » | $^3F - 13_5^\circ$ | $d^7s \longrightarrow$ | ? | $^{3,5}G_5^\circ$ ? |
| » | $^3F - 16_4^\circ$ | ? $\longrightarrow$ | ? | |
| » | $^5F - 19_4^\circ$ | $d^7s \longrightarrow$ | ? | $^3G_4^\circ$ ? |

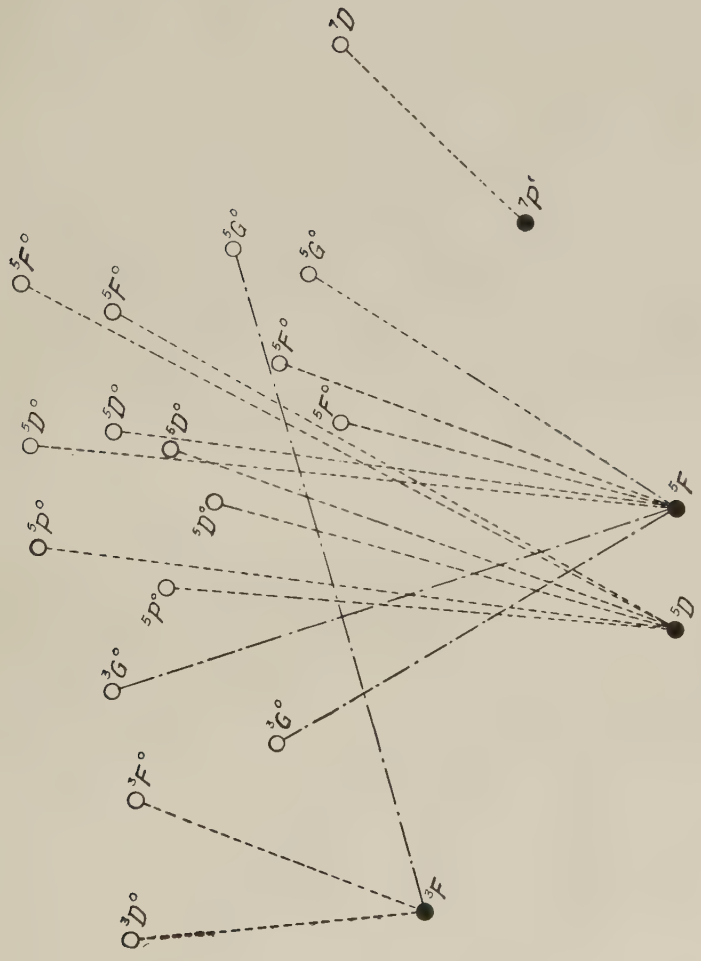


FIG. 8.

TABLA IX

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros: | | | |
| Co, Rh | $^4F$ — $^4F°$ | | |
| » | $^2F$ — $^4F°$ | | $\Delta R = 2.$ |
| » | $^2F$ — $^2F°$ | | |
| » | $^4F$ — $^4D°$ | $d^8s \longrightarrow d^8p$ | |
| » | $^4F$ — $^4G°$ | | |
| » | $^2F$ — $^4G°$ | | $\Delta R = 2$ |
| » | $^4F$ — $^2G°$ | | $\Delta R = 2$ |
| Co | $^4G°$ — 27 | $d^7sp \longrightarrow$ ? | |
| » | $^2G$ — $^2F°$ | $d^7sp \longrightarrow d^8p$ | $2e$ |
| » | $^2F$ — $^2G°$ | $d^7sp$ | |
| » | $^2F$ — $^2G°$ | $d^8p$ | |
| » | $^4F$ — $^3D°$ | $d^8s \longrightarrow d^7sp$ | |
| » | $^2F$ — $^2F°$ | » | |
| » | $^2F$ — $^2D°$ | » | |
| » | $^4F$ — $^4D°$ | $d^7sp$ | |
| » | $^4F$ — $^4F°$ | » | |
| » | $^4F$ — $^4F°$ | $d^7s^2 \longrightarrow d^8p$ | $2e$ |
| » | $^4F$ — $^4G°$ | $d^7sp$ | |
| Rh | $^4P$ — $^4D°$ | | |
| » | $^2F$ — $^4D°$ | $d^8s \longrightarrow d^8p$ | $\Delta R = 2.$ |
| » | $^4D°$ — $^4F$ | $d^8s$ | |
| » | $^2G°$ — $^4G$ | $d^8p \longrightarrow$ ? | $\Delta R = 2$ |
| » | $^4G°$ — $^4H$ | ? | |
| » | $P°$ — $D$ | ? $\longrightarrow$ ? | |
| Atomos ionizados: | | | |
| Ni, Pd | $^2F$ — $^4G°$ | | $\Delta R = 2$ |
| » | $^2F$ — $^4F°$ | | $\Delta R = 2$ |
| » | $^2F$ — $^2G°$ | | |
| » | $^2F$ — $^2F°$ | | |
| » | $^4F$ — $^4D°$ | $d^8s \longrightarrow d^8p$ | |
| » | $^2F$ — $^2D°$ | | |
| » | $^4F$ — $^4G°$ | | |
| Pd | $^2G$ — $^2H°$ | | |
| » | $^2G$ — $^2F°$ | | |

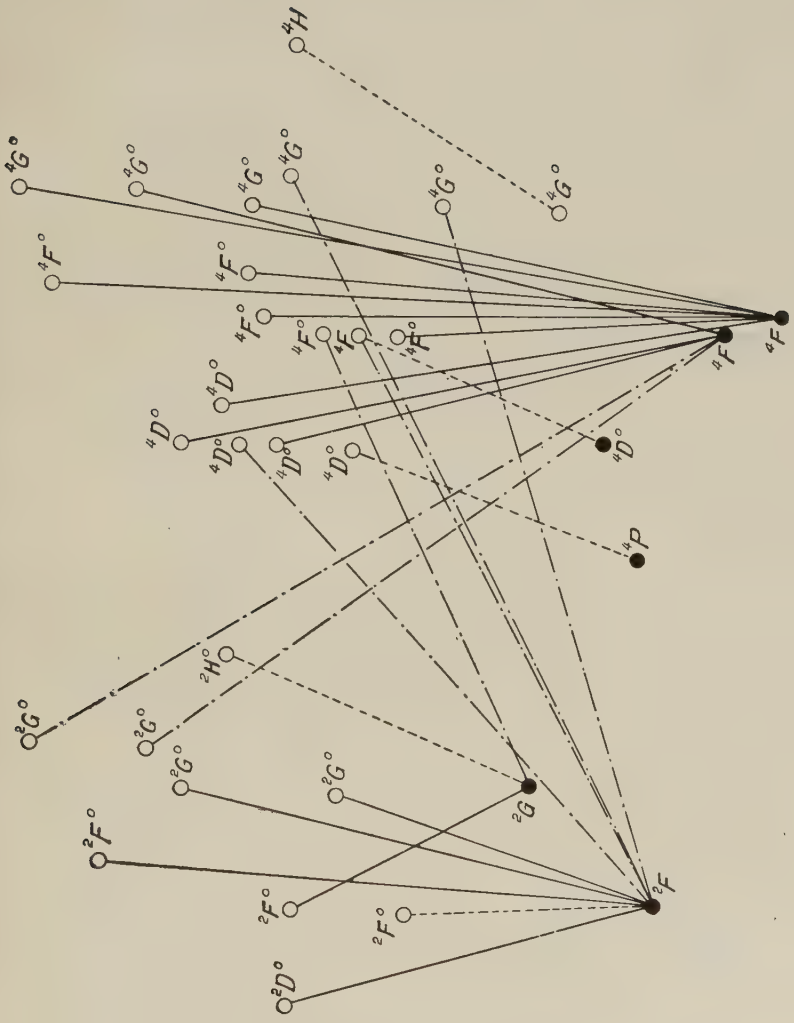
$^4H$
$^4G^\circ$
$^4F^\circ$
$^4D^\circ$
$^4P$
$^2H^\circ$
$^2G^\circ$
$^2F^\circ$
$^2D^\circ$
$^4F$
$^2G$
$^2F$

Fig. 9.

TABLA X

| Elementos | Términos | Configuraciones electrónicas | Observaciones |
|---|---|---|---|
| Atomos neutros: | | | |
| Ni, Pd | $^3D$ — $^3F°$ | | |
| » | $^3D$ — $^3P°$ | | |
| » | $^3D$ — $^3D°$ | $d^9s \rightarrow d^9p$ | |
| » | $^1F°$ — $^1G$ | | |
| » | $^3F°$ — $^3G$ | $d^9p \rightarrow d^9d$ | |
| Ni | $^1S$ — $^1P°$ | $d^{10} \rightarrow d^9p$ | |
| » | $^1D$ — $^1F°$ | $d^8sp$ | |
| » | $^1D$ — $^1F°$ | $d^9p$ | |
| » | $^1D$ — $^1P°$ | » | |
| » | $^1D$ — $^1D°$ | $d^9s \rightarrow d^8sp$ | |
| » | $^1D$ — $^3F°$ | » | |
| » | $^3D$ — $^3D°$ | » | |
| » | $^3D$ — $^5F°$ | » | $\Delta R = 2.$ |
| » | $^5G°$ — $^5F$ | $d^8sp \rightarrow d^8ss$ | |
| » | $^3F$ — $^5F°$ | $d^8sp$ | $\Delta R = 2.$ |
| » | $^3F$ — $^3F°$ | $d^8s^2 \rightarrow$ » | |
| » | $^3F$ — $^3F°$ | $d^9p$ | $2e.$ |
| Pd | $^3D°$ — $^3D$ | | |
| » | $^3D°$ — $^3F$ | | |
| » | $^3P°$ — $^3S$ | $d^9p \rightarrow d^9d$ | |
| » | $^3P°$ — $^3P$ | | |
| » | $^3P°$ — $^3D$ | | |
| » | $^1D$ — $^3F°$ | | $\Delta R = 2.$ |
| » | $^1D$ — $^1D°$ | $d^9s \rightarrow d^9p$ | |
| Atomos ionizados | | | |
| Ag, Cu | $^1D$ — $^3F°$ | | $\Delta R = 2$ |
| Ag | $^1D$ — $^3P°$ | | $\Delta R = 2$ |
| Cu, Ag, Au | $^3D°$ — $^3P°$ | | |
| Cu, Ag | $^1D$ — $^3D°$ | $d^9s \rightarrow d^9p$ | $\Delta R = 2$ |
| » | $^3D$ — $^3F$ | | |
| Cu, Ag, Au | $^3D$ — $^3D°$ | | |
| Ag | $^1D$ — $^1F°$ | | |
| » | $^1D$ — $^1D°$ | | |
| » | $^3D°$ — $^3D$ | $d^9s$ | |
| Au | $^3F°$ — $^3D$ | $d^9p \rightarrow$ » | |
| » | $^3F°$ — $^3F$ | ? | |

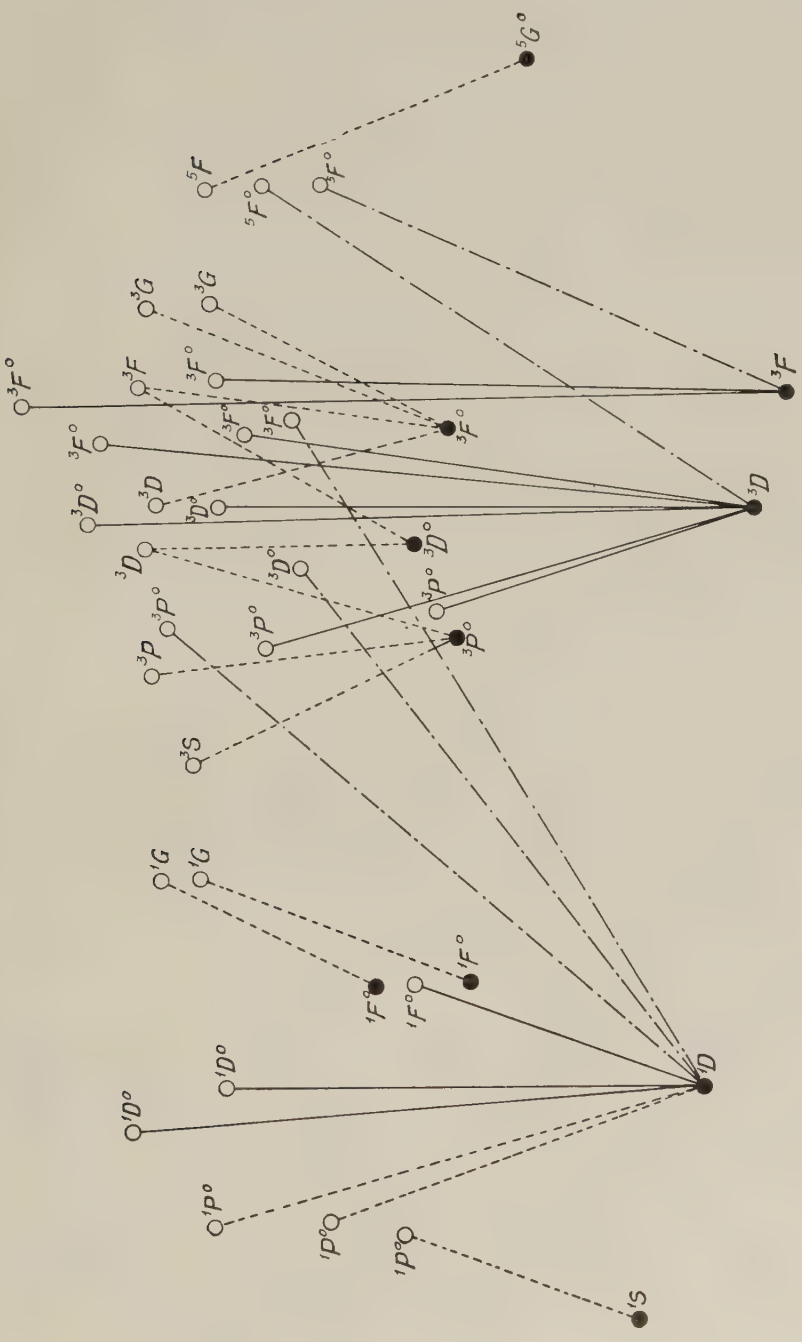
$^5G^0$
$^5F$
$^5F^0$
$^3F^0$
$^3G$
$^3G$
$^3F^0$
$^3F$
$^3F^0$
$^3F$
$^3F^0$
$^3F^0$
$^3F^0$
$^3F^0$
$^3F^0$
$^3D^0$
$^3D$
$^3D^0$
$^3D$
$^3D$
$^3D^0$
$^3D^0$
$^3P^0$
$^3P^0$
$^3P^0$
$^3P^0$
$^3P^0$
$^3P$
$^3S$
$^1G$
$^1G$
$^1F^0$
$^1F^0$
$^1F^0$
$^1D^0$
$^1D^0$
$^1P^0$
$^1D^0$
$^1P^0$
$^1S$
$^3F$
$^3D$
$^1D$

FIG. 10.

4. Resumen y conclusiones. — El cuadro XI resume los cuadros anteriores en forma numérica y muestra que la mayoría de las líneas últimas tienen como niveles iniciales los términos pares.

Tabla XI

| | Atomos neutros | | Atomos ionizados | |
|---|---|---|---|---|
| | Pares | Impares | Pares | Impares |
| I | 47 | 32 | 26 | 2 |
| II | 22 | 95 | 20 | 26 |
| III | 25 | 31 | 68 | 12 |
| IV | 99 | — | 85 | 11 |
| V | 31 | 48 | 32 | 8 |
| VI | 62 | 12 | 28 | — |
| VII | 23 | 11 | 12 | 4 |
| VIII | 8 | 13 | — | — |
| Fe, etc. | 51 | 1 | 26 | — |
| Co, etc. | 63 | 4 | — | — |
| Ni, etc. | 57 | 15 | 25 | — |
| Σ | 488 | 262 | 322 | 58 |

La figura 11 resume las combinaciones encontradas.

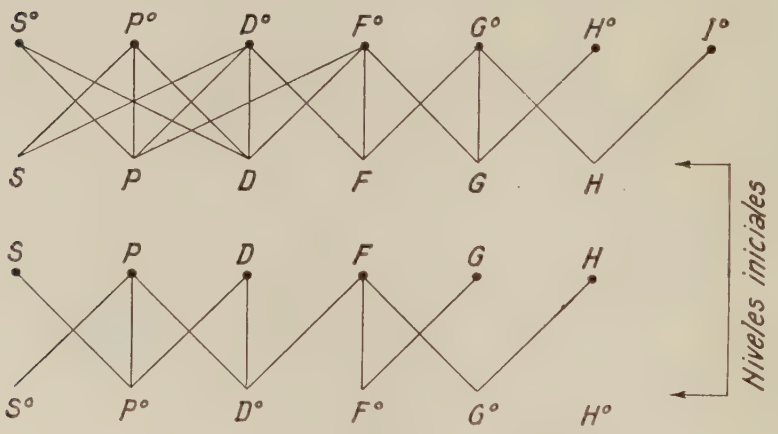


Fig. 11.

Estas conclusiones no son sino la confirmación de las halladas anteriormente y que figuran en las memorias que hemos citado.

Buenos Aires, Enero de 1938.

# NUEVO MOTOR TERMICO

Por JOSE PIAZZA

Este dispositivo es el resultado de una nueva aplicación que hemos dado a la espiral; como en sus espiras se puede provocar o utilizar una diferencia de temperatura o de presión, el dispositivo puede funcionar sea como compresor o como motor.

El dispositivo de la figura 1 contiene en sus espiras una fase líquida y una fase gaseosa; girando el serpentín alrededor de su

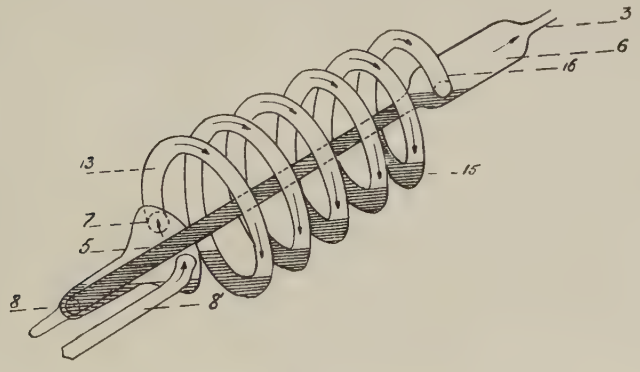


Fig. 1.

eje la fase líquda se mueve desde una extremidad hacia la otra. El bulbo 7 gradúa la cantidad de líquido que entra en el serpentín 13. Cuando la unión se encuentra en la parte baja entra en el serpentín la fase líquida, cuando se encuentra arriba entra la fase gaseosa. El eje está formado por un caño 5: dando al mismo una cierta inclinación y girando el dispositivo, la fase líquida sube en las espiras del serpentín, entra en el ensanchamiento del eje central 6 y baja por el caño axial 5 entrando de nuevo en el bulbo 7. La parte inferior está constituída por un cierre hidráulico 8 que impide al gas de escaparse en el caño central por la parte inferior.

En cuanto a la fase gaseosa podemos considerar dos casos típicos:

1) la misma no se condensa en el dispositivo;

2) la fase gaseosa se condensa en el dispositivo.

Según los casos la construcción del aparato será distinta.

En el primer caso la compresión o expansión de la fase gaseosa será de tipo isotérmico, en el segundo caso será de tipo adiabático.

Imaginamos una sola espira, de acuerdo a la figura 2. La parte que comunica con el bulbo figura cerrada, la otra que comunica con la otra extremidad del serpentín figura abierta.

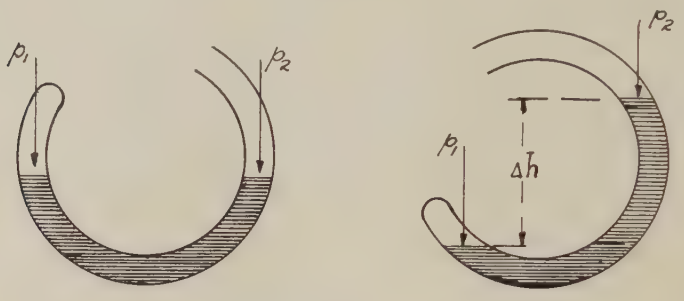


FIG. 2.

$$p_1 = p_2 \qquad p_2 + \Delta h = p_1$$

$$A_1 = n R T ln \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

$$p_e - p_s = \Sigma \Delta h$$

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d} + 2$$

Imaginamos primeramente el caso de la expansión isotérmica: si la fase líquida está al mismo nivel resulta que la presión $p_1$ será igual a la presión $p_2$ sobre las dos ramas de la espira; si hacemos girar la espira de un cierto ángulo, tenemos el caso de una compresión de acuerdo a lo indicado en la figura. Si la compresión es isotérmica el trabajo es proporcional a la diferencia de los logaritmos de la presión inicial y final. Durante esta compresión el centro de gravedad de la espira se ha desplazado y la nueva cupla tiende a dar al serpentín su posición primitiva. En este caso el gas comprimido en la espira hace funcionar el dispositivo como motor. El ciclo es completamente reversible. En las demás espiras sucede lo mismo, las diferencias de nivel

se suman y al final tenemos:

$$p_e - p_s = \Sigma \Delta h$$

siendo $p_e$ la presión en el bulbo y $p_s$ la presión a la salida del serpentín y $\Sigma \Delta h$ la sumatoria de las diferencias de nivel en las espiras.

Las pérdidas por rozamiento dependen de las características del aparato y el coeficiente de rozamiento es:

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d} + 2$$

siendo $l$ la suma de las longitudes de los cierres hidráulicos en el serpentín y $d$ el diámetro del caño.

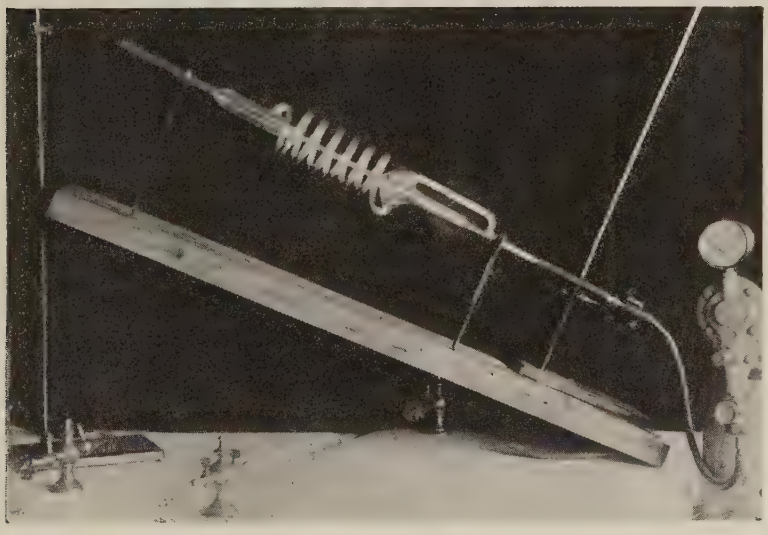

Fig. 3.

La realización del motor se nota en la figura 1 y en la fotografía (fig. 3). El motor está suspendido sobre dos cojinetes en posición inclinada. El gas entra lateralmente en el bulbo por el caño axial 8′, el gas se expande en el serpentín provocando en los cierres de mercurio una diferencia de nivel que provoca la rotación del dispositivo. El gas sale completamente expandido por el caño 3. La expansión se hace en forma sucesiva en cada espira y entonces el trabajo se acerca al máximo teórico. El dispositivo trabaja por superposición de

pequeños efectos hasta que la cupla de torsión venza la fuerza exterior.

Se ha substituído en otro modelo el gas comprimido por vapor producido en un balón acoplado al aparato en la parte inferior, dispuesto axialmente, y que gira con el dispositivo. El vapor sale en la parte superior al estado no condensado. Con este dispositivo se evita el contacto rotativo del caño fijo que conduce el gas comprimido con el caño axial de entrada. El dispositivo funciona con toda facilidad. En este caso la expansión no es isotérmica. Este aparato a más de un motor o compresor, según los casos, representa para el químico un saturador donde se pone en contacto íntimo una fase líquida con una fase gaseosa renovándose continuamente la superficie de contacto.

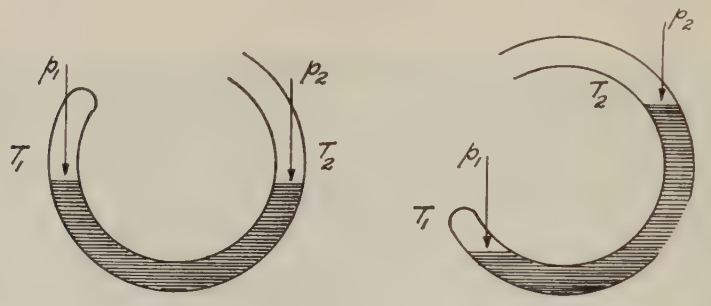


FIG. 4.

$$p_1 = p_2 \qquad p_1 > p_2$$

$$T_1 = T_2 \qquad T_1 > T_2$$

$$A_1 = Q\,\frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2}\,p$$

$$A \text{ total} = \frac{T \text{ hervidor} - T \text{ condensador}}{T \text{ hervidor}}\,Q$$

Ahora consideramos el segundo caso que es mucho más interesante o sea:

2) La fase gaseosa está constituída por el vapor saturado de la fase líquida. La figura 4 con sus fórmulas explica el funcionamiento del dispositivo. En este caso la realización corresponde a la figura

Nº 5 y a la fotografía Nº 6. La llama calienta el bulbo 7 y el vapor que se desprende se expande sucesivamente en las espiras del serpentín provocando la diferencia de nivel en los cierres y la rotación consiguiente del dispositivo. A medida que se expande, disminuye la temperatura y aumenta la cantidad de vapor, por el hecho que el mercurio de los cierres, disminuyendo la presión, si-

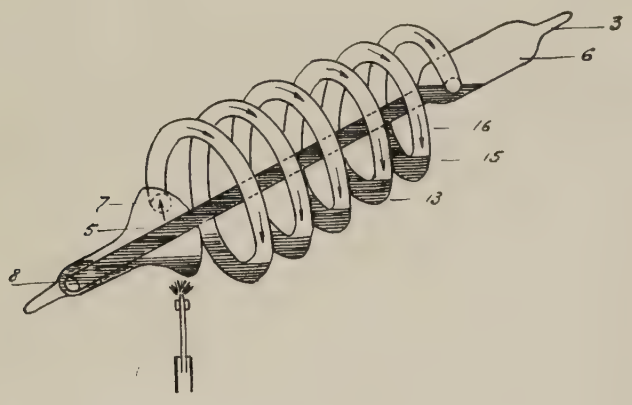


Fig. 5.

gue hirviendo aumentando en esta forma el rendimiento termodinámico del dispositivo. El trabajo tiende entonces a acercarse al valor máximo. El diámetro de las espiras tendría que aumentar a medida que se acerca a la extremidad superior del dispositivo.

En este modelo no se ha tomado en cuenta este hecho, pues en su contra influye la pérdida calórica. Como la tensión de vapor del mercurio se hace sensible recién arriba de 320° y el dispositivo trabaja a una temperatura superior, las pérdidas calóricas son enormes y sorprende el hecho de que una pequeña llama sea suficiente para hacer funcionar el motor.

Este aparato está completamente cerrado al vacío. El dispositivo 7 corresponde al hervidor y el dispositivo 6 al condensador. Este motor no tiene estator y el líquido no está sometido a pérdidas.

Para llegar a este resultado hemos tenido que armonizar todos los factores que intervienen, principalmente las dimensiones de cada órgano y la cantidad óptima de carga. En todo esto hemos sido secundados eficazmente por nuestro técnico en trabajos de vidrio señor Ricardo Kurtzer.

Este principio deja prever la posibilidad de dar a la fase líquida densidades aparentes sumamente elevadas, haciendo actuar en vez de la gravedad la fuerza centrífuga; es una posibilidad que tenemos

FIG. 6.

que estudiar, pues en esta forma, con un aparato sumamente reducido, se podría llegar a grandes potencias.

Santa Fe, Agosto de 1937.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
CIENTIFICAS Y TECNOLOGICAS - FACULTAD DE
QUIMICA INDUSTRIAL Y AGRICOLA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

# COTEJOS ECONOMICOS Y SELECCION ECONOMICA

Por el Ing. MAURICIO DURRIEU

*(Continuación)*

47. — Valor actual de una instalación, obra, estructura. — El concepto del valor actual de una instalación, obra o estructura, ha menester de una clara exposición, tanto para los fines de una definición propia como en atención a la variedad de los objetos y de las circunstancias a que dicho valor puede corresponder.

No bastan, a estos efectos, la breve enunciación que hiciéramos del valor actual en el Cuadro de los « Elementos del costo anual de servicio »; ni las accidentales referencias a dicho valor formuladas con ocasión de algunos cálculos en que interviene.

Para hacerse cargo de lo que representa el valor actual, es insuficiente definirlo como el *valor* que resta a una instalación, obra o estructura, en un instante dado, admitiendo que se la aproveche con el mejor tino y propiedad. La noción así expresada, resulta por demás escueta; no da explícita razón de la dependencia que ese valor guarda con algunos factores primordiales: la naturaleza del objeto a que el valor se refiere; la posibilidad de continuar utilizándolo; la condición, propicia o no, de esa utilización venidera; los medios viables para apreciar tal condición; —factores todos vinculados al establecimiento de la ley de variación del valor actual.

Aún cabe advertir que la determinación del valor actual, en materia de selección económica, supone evidente y fundamentalmente que las instalaciones, obras o estructuras tienen cumplida ejecución y conservación y son utilizadas cabalmente para sus fines ulteriores, principios, uno y otro, que encuadran aquella determinación.

Además, no es regla acertada la de introducir en la determinación del valor actual un concepto de estimación extrínseca, admitiendo que por alguna circunstancia de excepción, a los $a$ años, el valor del objeto aumente o decrezca de una manera notable con

respecto al que normalmente y dentro de su aplicación anterior tendría. Los cálculos económicos no pueden entrar en esa vía especulativa. Los cotejos, en particular, fúndanse en previsiones normales y definidas. Es preferible no hacerlos si ha de desatenderse ese fundamento, y pasar a cálculos antojadizos.

En el terreno ideológico, fácil es sentar que toda instalación, obra o estructura, ofrece en un momento dado un valor actual, función de su utilidad que asimismo puede desdoblarse en dos partes, a saber: un *valor para uso,* correlativo de las condiciones en que dicha instalación, obra o estructura préstase a ser aprovechada, — y un *valor residual* o *de demolición,* constituído por el de aquellas partes materiales susceptibles de alguna utilidad cuando sea desarmada o desintegrada la instalación, etc., carente ya de provechosa aplicación como un todo. A este último valor redúcese, está claro, el actual cuando la instalación, obra o estructura alcanza su límite de duración.

Surge, entonces, de las consideraciones precedentes, que desde el momento en que un objeto entra en la actividad económica, su valor inicial, $C$, experimenta una *depreciación, desmedro* o *mengua*, $D_a$. La expresión que vincula estas dos cantidades con el valor actual, $C_a$, referida al día inicial de actividad, es

$$D_a = C - \frac{C_a}{(1+r)^a} \qquad [31]$$

y si hacemos asimismo

$$D_a = \frac{p}{100} C \qquad [a]$$

$$\frac{p}{100} C = C - \frac{C_a}{(1+r)^a} \quad ; \quad C_a = \frac{100 - p}{100} C (1+r)^a \qquad [31_a]$$

Es lo usual, en la técnica, estimar $D_a$ [1] en función de $C$, como en la $(a)$; para deducir $C_a$, ocurre tener entonces presente que $p$ no se refiere al año $a$, sino al inicial, y ese valor de $p$ no puede ser ya el que corrientemente se utiliza cuando la [31] se escribe equivocadamente

$$D_a = C - C_a .$$

[1] Es comprensible que sólo experimentan menguas los objetos que *se desgastan* paulatinamente por el uso o desmerecen siquiera con el correr del tiempo. Para las inversiones de cuyo monto no es posible recuperar parte alguna, la mengua es naturalmente total.

Ha de comprenderse que no es éste el procedimiento conveniente para calcular $C_a$. Ninguna hipótesis simplista, así como ninguna ley matemática invariable, hallan cabida en la determinación de este valor. La estimación directa de $C_a$, es lo mejor, porque toma en cuenta los factores esenciales de que depende, y tantea las circunstancias que corresponden a la época para la cual se le estima.

El primer juicio acerca de $C_a$, es que tiene por límite inferior $C_l$, valor residual de la instalación, obra o estructura calculable por estimación de las partes materiales a obtenerse por demolición o desarme, con deducción del costo presupuesto de esa operación. Asimismo, $C_a$ decrecerá ordinariamente entre $C$ y $C_l$ a partir del día inicial de la actividad. El primer supuesto debe tenerse por exacto, siempre que toda instalación, obra o estructura sea conservada y parcialmente renovada cada vez que corresponda; el segundo no lo es en general, porque las alternativas del estado de conservación pueden engendrar otras del valor de la instalación, etc., divergentes de la ley uniforme o regular de decrecimiento.

La consideración técnica mediante para determinar el valor actual de una instalación, obra, o en general de toda estructura compleja, debe atender cada vez el criterio teórico y los factores de la práctica. La tarea resulta, con ello, singularmente delicada: considera la materialidad del objeto, para sentar una *apreciación intrínseca* del mismo; pero también suele hacerse cargo de la conveniencia y de la posible adaptación del objeto a prestar algún oficio, con lo cual intervienen en las operaciones factores *externos* o *extrínsecos*.

Lo más cómodo, sin duda, es teorizar. Y en verdad, la teoría no debe quedar descartada de la investigación, porque suministra insustituibles elementos de juicio.

Mas, la abstracción que por su intermedio verifícase de muchos hechos, la dificultad de hacer intervenir y de aquilatar en una ley matemática los factores convenientes, y la inseguridad con que es frecuente tener que discernir los valores numéricos aplicables a esa ley, son otras tantas causas del desmerecimiento del método puramente teórico.

Por ello, en numerosas oportunidades, cuando la persona que realiza el estudio posee una suficiente experiencia de las instalaciones, obras, etc., en tela de juicio, podrá alcanzar un buen resultado estimando empíricamente $C_a$ y puede concederse a este procedimiento la precedencia sobre otro teórico falto de apoyo experimental.

Lo más acertado, no obstante, será que concurran ambos criterios en la circunstancia.

Las estimaciones empíricas del valor actual, responden a métodos variados y arbitrarios. Es difícil pautarlas.

Los procedimientos teóricos, por el contrario, admiten una clasificación. Pueden ser *generales* o *particulares; racionales* o *empírico-racionales.*

48. — Método racional general de determinación del valor actual. — Toda instalación, obra o estructura compleja, consta de un variado número de partes constitutivas que realizan conjuntos orgánicos. Una obra, p. ejemplo, hállase formada por trabajos o estructuras diversas. Cada parte concurre a integrar el todo con un valor que asimismo corre parejas con una duración. Puede ser ésta igual, mayor o menor que la de la propia obra, y resulta obvio que en cada caso, la parte tomada en cuenta no puede considerarse lisa y llanamente incluída en el conjunto por su valor de obtención e incorporación en él, desde que ocurrirá a menudo repararla o renovarla en oportunidad o medida distinta de otras partes. Es visible que según resulte el estado de la instalación, obra o estructura por efecto del uso, de los reparos y de las renovaciones en cada una de sus partes realizadas, la eficiencia de dicha instalación, obra, etc., se modificará. Ni simple, ni fácil de averiguar, es con frecuencia la ley de esta modificación.

Sin entrar en excesivas disquisiciones sobre el punto, es razonable clasificar las partes de una instalación u obra en *tres grupos,* a saber:

1º Partes del valor que se invierten una sola vez y no dan lugar a nuevos gastos (ejemplo: en las obras, las excavaciones de cimientos; los derechos de construcción; etc.). No se recuperan al terminar la vida de la instalación, obra, etc.

2º Partes que duran tanto o más que el todo, y requieren ciertos desembolsos por reparos cuya periodicidad puede sentarse; al terminar la duración del todo, acaso tengan esas partes cierto valor residual.

3º Partes que duran menos que el todo y exigen reparos y también renovaciones de periodicidad técnicamente definible. Al término de la vida del todo, podrán suministrar un valor residual.

Veamos, ahora, cómo intervienen estas distintas partes en el valor total, partiendo del aspecto intrínseco.

*Partes del grupo primero.*

Llamemos $G_1$ el valor original de una parte de esta naturaleza. Atenta la constancia de ese valor, la consunción paulatina del mismo a medida que transcurre la existencia, $l$, de la instalación, obra o estructura, hállase representada teóricamente por la amortización correspondiente. Cada unidad de ese valor, o sea cada 1 $, debe quedar totalmente amortizada a los $l$ años, de manera que la anualidad respectiva es $d_l = \dfrac{r}{[(1+r)^l - 1]\,(1+r)}$, y como esa anualidad, a los $a$ años, ha reconstituído la parte amortizada del valor total en ese tiempo, la suma obtenida por cada 1 $ es $d_l z_a$, o sea

$$d_l\, z_a = \frac{r}{[(1+r)^l - 1]\,(1+r)} \cdot \frac{[(1+r)^a - 1]\,(1+r)}{r} = \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^l - 1}$$

o con la transformación Benitz

$$d_l\, z_a = \frac{T_a\,(1 - T_l)}{T_l\,(1 - T_a)} .$$

Para todo el capital, pues, será

$$\Sigma\, G_1\, z_a\, d_l = \Sigma\, G_1 \frac{(1+r)^{a-1}}{(1+r)^{l-1}} = \Sigma\, G_1 \frac{T_a\,(1 - T_l)}{T_l\,(1 - T_a)} .$$

El valor restante, o actual, resulta ser:

$$\Sigma\, G_1\,(1 - z_a\, d_l) = \Sigma\, G_1 \frac{[(1+r)^l - 1] - [(1+r)^a - 1]}{(1+r)^l - 1} = \Sigma\, G_1 \frac{T_l - T_a}{T_l\,(1 - T_a)}\,[a]$$

*Partes del grupo segundo.*

Sea $G_2$ el valor inicial de una parte de esta categoría. Admitamos que su propia duración sea $p \geq l$, y se la repare de tanto en tanto, con un costo que importe una fracción variable de $G_2$. Durante el plazo $a$, correspondiente a la época en que se considera el valor actual, se tendrá:

Si $a < n$ ($n$ = plazo mínimo de reparo).

*Amortizado*: cuando $G_{2_l}$ fuese el valor residual de la parte al fin del plazo $l$:

$$G_2\, d_l\, z_a = G_2 \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^l - 1}$$

*Valor restante*:

$$G_2\left(1 - \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^l - 1}\right) + \frac{G_{2l}}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= G_2 \frac{(1+r)^l - (1+r)^a}{(1+r)^l - 1} + G_{2l} \frac{(1+r)^a}{(1+r)^l}$$

Luego, para todas las partes similares:

$$\Sigma\, G_2 \frac{(1+r)^l - (1+r)^a}{(1+r)^l - 1} + \Sigma'.\, G_{2l} \frac{(1+r)^a}{(1+r)^l} \qquad [b]$$

Si $a > n$, el valor de la parte comprenderá el de los reparos periódicos. Para la de valor $G_2$, con costos saltuarios cuyo menor intervalo sea $n$, el costo total, en el plazo $l$, admitiendo la existencia de un valor residual $G_{2l}$, sería:

$$\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \frac{S_p}{(1+r)^{p-1}} + \ldots + \frac{S_n}{(1+r)^{2n-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_o}{(1+r)^{2o-1}} + \ldots + \frac{S_n}{(1+r)^{(xn-1)<a}} + \frac{S_o}{(1+r)^{(xn-1)<a}} + \ldots\right]$$

y de este costo lo amortizado en $a$ años:

$$\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \frac{S_p}{(1+r)^{p-1}} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{S_n}{(1+r)^{2n-1}} + \ldots\right] \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^l - 1}$$

Luego

*Valor restante*:

$$\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \ldots\right] \frac{(1+r)^l - (1+r)^a}{(1+r)^l - 1} + G_{2l} \frac{(1+r)^a}{(1+r)^l}$$

Para el conjunto de partes:

$$\Sigma\left[G_2+\frac{S_n}{(1+r)^{n-1}}+\frac{S_o}{(1+r)^{o-1}}+\ldots\right]\frac{(1+r)^l-(1+r)^a}{(1+r)^l-1}+$$

$$+\Sigma G_{2_l}\frac{(1+r)^a}{(1+r)^l}=\Sigma\left[G_2+\frac{S_n}{(1+r)^{n-1}}+\frac{S_o}{(1+r)^{o-1}}+\ldots\right]\frac{T_l-T_a}{T_l(1-T_a)}+$$

$$+\Sigma G_{2_l}\frac{1-T_l}{1-T_a} \qquad [c]$$

*Partes del grupo tercero.*

La expresión $(c)$ es aplicable, con admitir que alguno de los valores, $S_i$, corresponda a una renovación que importaría un costo

$$S_i = G_3 - G_{3_l},$$

en que $G_{3l}$ fuese el valor remanente de la parte en el momento de la renovación. Este valor $G_{3_l}$ puede diferir del residual de la parte al final de la duración de la instalación, obra o estructura general, según la época relativa de la renovación anterior. Por ello debe ponerse $G_{3_l}$ distinto de $G_{3_{l'}}$ para $l'$ igual al intervalo entre renovaciones.

Obvio es que al calcular el valor actual de una instalación, obra o estructura por este procedimiento, no habrá que pensar en deducir el costo de reparos en el momento determinado por el plazo $a$, puesto que se supone la conservación satisfactoria de todo en su tiempo.

El valor actual, pues, de una instalación, obra o estructura que comprendiese partes de los tres grupos, estaría dado por la suma de las expresiones generales correspondientes a esos grupos:

$$(a) + (b) + (c).$$

No nos parece necesario plantear las expresiones posibles, en atención a su sencilla formación.

Más simple y breve, aunque un tanto menos propio, es evitar la intervención en los cálculos anteriores de los montos de reparos y renovaciones, y determinar para cada parte constitutiva el valor restante de obtención, más el residual, deduciendo de la suma de estos dos valores el importe de los reparos o restauraciones a eje-

cutarse de inmediato, en el supuesto de que faltó anteriormente la conservación normal adecuada.

Esta manera de calcular es objetable desde luego porque no considera los costos de reparos y renovaciones con montos adecuados a las épocas normales de inversión que les corresponden, y también porque la conservación y la restauración de una instalación, obra o estructura, aunque se las realice cumplida y oportunamente, demandan mayores expensas a medida que la instalación, obra, etc., envejece.

En verdad, difícil es prever con visos de propiedad los montos $S$ para las distintas épocas en que ocurrirán reparos y renovaciones. En general, adóptanse criterios muy arbitrarios para realizar esa previsión, y es muy difícil razonar estas investigaciones. El cálculo del valor actual conforme lo indicamos, aunque más conveniente en el concepto teórico, dará en la realidad más o menos satisfactorios resultados según la prolijidad y el acierto con que se proceda. Son tantos los factores y elementos a considerarse, a menudo, que el calculista podrá fatigarse en la tarea de determinarles.

49. — Fórmula de los provechos equiproporcionales [1]. — Todo objeto vendido de *segunda mano*, tiene un valor actual indudable: así lo pone de manifiesto la transferencia realizada *a título oneroso*. Para establecer ese valor, cabe partir de varios supuestos, atendiendo al *tiempo transcurrido* desde la creación y utilización del objeto, y a las *circunstancias*, permanentes unas, como la acción de la intemperie, el desgaste en servicio, etc., y accidentales otras, como las conveniencias particulares, el desuso, etc. Se ve que si el desmedro es *materia de suposición*, el valor actual *ha de ser estimado*.

Evidente es que si se piensa realizar la estimación sopesando las conveniencias del adquirente de segunda mano, plantéase un nuevo problema económico, en más de una oportunidad distinto del que origina el cálculo donde ha de intervenir $C_a$.

Ha de meditarse este aspecto del procedimiento de investigación del valor actual que pasamos a tratar, ya que trae implícitamente al cotejo en estudio una nueva condición: la de considerar a $C_a$ en una forma que puede diferir de la que corresuonde a la aplica-

[1] Establecida por el ingeniero norteamericano John C. Lounsbury Fish en su obra «Engineering Economics», Mc. Graw-Hill Book C° Inc., New York, 1923, 2ª ed., n°. 1706, p. 186.

ción dentro del primitivo objeto de la instalación, etc., y también susceptible de variar de un tipo a otro de instalación, etc., a cotejarse.

La fórmula que pasamos a ver, incluye esa condición.

El principio en que estriba, es el siguiente: « *Un precio equitativo por una estructura vendible de segunda mano, es aquél que habrá de producir al comprador y al vendedor razones iguales de los provechos anuales realizados con dicha estructura, a los capitales invertidos en adquirirla* ».

Sean, entonces,

$l$, la duración total (vida) de la estructura, en *años*;

$a$, la edad, en *años*, para la cual búscase el valor actual que por diferencia con el costo inicial, luego de trasladado a la misma época que éste (1), dará a conocer la depreciación (fórmula [31]);

$z_a$, la suma formada a los $a$ años por una anualidad de 1 $, depositada al comienzo de cada año.

*Para el vendedor de la estructura*:

$b'$, la utilidad anual media, en los $a$ años;

$e'$, el producto o las entradas medias, en los $a$ años;

$y_a$, el costo anual medio de servicio, en los $a$ años;

$C$, el primer costo de la estructura;

$C_a$, el valor actual de la misma, a los $a$ años;

$d_a$, la anualidad a depositarse al comienzo de cada año para constituir un capital de 1 $ en $a$ años;

$r'$, la razón del interés anual y otras cargas fijas al primer costo;

$P'$, el costo anual medio de funcionamiento o servicio de la estructura en los $a$ años;

$S'$, el costo anual medio de conservación de la estructura en los $a$ años.

*Para el adquirente de la estructura*:

$b''$, la utilidad anual media para $l - a$ años, o sea el resto de la vida de la estructura;

$e''$, las entradas medias anuales en los $l - a$ años;

$y_{l-a}$, el costo anual medio de servicio en los $l - a$ años;

(1) Aquí planteamos el procedimiento con la misma rectificación de que dimos cuenta en lo precedente, y aplicada por lo demás, en todas nuestras fórmulas.

$C_a$, el valor actual de la estructura, que representa el primer costo para el adquirente;

$C_l$, el valor desidual de la estructura;

$d_{l-a}$, la anualidad a depositarse cada comienzo de año para constituir 1 $ al cabo de $l - a$ años;

$r''$, la razón del interés anual y otras cargas fijas al primer costo, $C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}$;

$P''$, el costo anual medio de funcionamiento o servicio en los $l - a$ años;

$S''$, el costo anual medio de conservación en los $l - a$ años.

Por la definición del método:

$$\frac{b'}{C - \frac{C_a}{(1+r)^a}} \qquad \frac{b''}{C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}} \qquad [a]$$

e indudablemente,

$$b' = e' - y_a \quad ; \quad b'' = e'' - y_{l-a} \qquad [b]$$

Mas, los costos anuales de explotación o servicio resultan de sumar las cargas fijas y las de marcha o producción y conservación expresadas en el cuadro general del número 17, esto es,

$$\left.\begin{aligned} y_a &= \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) d_a + \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r'}{1+r} + P' + S' = \\ &= \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right)\left(d_a + \frac{r'}{1+r}\right) + P' + S' \\ y_{l-a} &= \left(C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\right)\left(d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}\right) + P'' + S'' \end{aligned}\right\} \qquad [c]$$

Luego

$$\frac{e' - \left[\left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right)\left(d_a + \frac{r'}{1+r}\right) + P' + S'\right]}{C - \frac{C_a}{(1+r)^a}} =$$

$$= \frac{e'' - \left[\left(C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\right)\left(d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}\right) + P'' + S''\right]}{C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}}$$

de donde

$$\frac{C^2_a}{(1+r)^a}\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) +$$

$$+ C_a\left[e' + \frac{e''}{(1+r)^a} - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{C_l}{(1+r)^l}\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) - \left(P' + S' + \frac{P''+S''}{(1+r)^a}\right)\right] =$$

$$= C\,[e'' - (P'' + S'')] +$$

$$+ \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\left[e' - (P' + S') - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right)\right]$$

Multiplicando por $(1+r)^a$ y dividiendo por $d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}$

$$C_a{}^2 + C_a \frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}}\left[e' + \frac{e''}{(1+r)^a} - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{C_l}{(1+r)^l}\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) - \left(P' + S' + \frac{P''+S''}{(1+r)^a}\right)\right] =$$

$$= C\,\frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}}\,[e'' - (P'' + S'')] +$$

$$+ \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\,\frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}}\left[e' - (P' + S') -\right.$$

$$\left. - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right)\right]$$

Escribamos ahora

$$2g = \frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}} \left[ e' + \frac{e''}{(1+r)^a} - \right.$$

$$\left. - \left( C + \frac{C_l}{(1+r)^l} \right) \left( d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r} - \left( P' + S' + \frac{P''+S''}{(1+r)^a} \right) \right] \right];$$

$$m = C \frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'+r''}{1+r}} \left[ e'' - (P'' + S'') + \right.$$

$$+ \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} \frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}} \left[ e' - (P' + S') - \right.$$

$$\left. \left. - C \left( d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r} \right) \right] \right] \qquad [d]$$

y sustituyendo

$$C_a^2 + 2g\, C_a = m$$

Añadamos $g^2$ a ambos miembros

$$C_a^2 + 2g\, C_a + g^2 = m + g^2$$

y de consiguiente

$$(C_a + g)^2 = m + g^2$$

Luego

$$C_a = -g \pm \sqrt{m + g^2} \qquad [32]$$

en la que $g$ tiene por valor la mitad de la primera de las expresiones literales $(d)$.

Esta fórmula permite el cálculo de $C_a$ cuando sean estimados $e'$, $e''$, $r'$, $r''$, $C_l$, $P'$ $S'$, $P''$ y $S''$, pues los valores numéricos de $d_a$, $d_{l-a}$, $(1+r)^a$, $(1+r)^{l-a}$ y $(1+r)^l$ se calculan o hallan en tablas con el solo conocimiento de $r$, $a$ y $l$. Conocido $C_a$, la [31] da la depreciación.

50. — *Casos particulares.* — Sea, en primer lugar, la hipótesis de que no exista provecho en el servicio de la estructura, sólo haya un interés del costo de producción (construcción) y los productos sean proporcionales a los servicios anuales o ejercicios respectivamente realizados por vendedor y comprador.

La primera parte de la suposición, equivale a sentar

$$b' = b'' = 0.$$

De consiguiente, en las (*b*), (nº 49),

$$e' - y_a = 0 \qquad e'' = y_{l-a} = 0$$

o

$$e' = y_a \qquad e'' = y_{l-a} \,. \qquad [e]$$

La segunda parte de la hipótesis, es que

$$\frac{e'}{e''} = \frac{U'}{U''} \,,$$

si $U'$ y $U''$ respectivamente son los ejercicios anuales del vendedor y del comprador.

Como las (*e*) permiten escribir:

$$\frac{y_a}{y_{l-a}} = \frac{U'}{U''} \qquad o \qquad \frac{y_a}{U'} = \frac{y_{l-a}}{U''} \,,$$

los costos medios anuales de servicio resultan, así, proporcionales a los servicios en toda la vida de la estructura, y llamando $y_l$ el costo anual medio de servicio para toda la existencia de la estructura, así como $U$ el aprovechamiento medio anual de la misma, también será cierto que

$$\frac{y_{l-a}}{U''} = \frac{y_l}{U} \qquad [f]$$

Cuando pongamos en lugar de $y_{l-a}$ e $y_l$ sus expresiones detalladas como en las (*c*), obtenemos:

$$\frac{1}{U''}\left[\left(C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\right)\left(d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}\right) + P'' + S''\right] =$$

$$= \frac{1}{U}\left[\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right)\left(d_l + \frac{r_1}{1+r}\right) + P + S\right] ,$$

y despejado $C_a$,

$$C_a = \frac{\dfrac{U''}{U}\left[\left(C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}\right)\left(d_l + \dfrac{r_1}{1+r}\right) + P + S\right] + \dfrac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\left(d_{l-a} + \dfrac{r''}{1+r}\right) - (P'' + S'')}{d_{l-a}} \Bigg/ \left(d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}\right) \qquad [33]$$

valor deducido conforme a las ideas de H. P. Gillette, expuestas en las páginas 36 y siguientes de su « Handbook of Cost Data », (Mc Graw-Hill Book Comp. Inc., New York, 1920).

*(Continuará)*

# BIBLIOGRAFIA

GOLDSZTAUB (S.), *Quelques idées actuelles sur la structure des métaux et des Alliages*. 39 pág., 1936 (Hermann & Cía., Editor).

El autor pasa revista al estudio de las estructuras cristalinas de los metales puros, a la relación entre el sistema periódico y la estructura cristalina, a la relación entre el radio atómico y el sistema periódico, y finalmente al estudio de las aleaciones.

Sucintamente se exponen los hechos y las ideas que predominan actualmente sobre la cuestión. Respecto de las fuentes originales de estudios profundos el autor se remite a las obras clásicas y fundamentales de Bragg, Hume-Rothery, Dehlinger, y a la reciente monografía del segundo de los nombrados.

Este fascículo, es el Nº 422 de la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles", y el 2º de los asuntos metalográficos y metalúrgicos.

R. V.

CASTRO (R.), *Progrès dans la technique de la Métalographie Microscopique*. 58 págs. 1935. (Hermann & Cía., Editor).

Este fascículo, constituye el Nº 301 de la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles" y el primero de una serie referente a metalografía y metalurgia.

En un resumen breve, el autor trata las partes fundamentales relativas al asunto: Proporción de la muestra; el examen subjetivo y la reproducción de los espectros observados; el microscopio metalográfico y el futuro de los métodos micrográficos en esta rama de aplicación. Completa el trabajo una serie de 39 citas bibliográficas, donde el interesado puede contar con más amplias informaciones.

El folleto ofrece el interés propio de este tipo de publicaciones, que permiten en forma rápida y sintética ilustrar sobre el estado actual de las diversas ramas de las ciencias puras y aplicadas. Particularmente, merecen mencionarse los datos sobre el porvenir de los métodos micrográficos, y las citas correspondientes, que dan una idea concreta sobre el amplio campo de acción de estos estudios.

R. V.

HERZOG (G.), *Les méthodes d'essai de corrosion des Métaux et alliages*. 78 páginas, 1936. (Hermann & Cía., Editor).

Forma el Nº 437 de la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles" y el 3º de los temas sobre metalurgia y metalografía.

El autor trata las nociones teóricas sobre la corrosión en medio húmedo; los métodos de valoración de la corrosión, indirectos y directos y los métodos de ensayo. Completa el trabajo, la enumeración de 59 citas bibliográficas. Además, 23 figuras permiten completar los conceptos del texto.

El fascículo forma un interesante resumen del estado actual de estos estudios y son numerosos los datos de valor que se exponen en la breve obra, particularmente en lo que se refiere a los métodos analíticos de estudio de la corrosión.

R. V.

PECHELBRONN, S. A. E. M. et FERRAUD, J., *Essais Physiques et Chimiques efectués sur les produits pétrolifères.* Un tomo 16 × 24, 465 páginas con 128 figuras en el texto. Precio por correo en Buenos Aires, 135 francos. Ch. Béranger, Paris y Lieja, 1937.

Fuera de los prefacios de H. Roy y H. Weiss y de la introducción firmada por J. Ferraud, esta obra publicada bajo el control de la dirección de servicios técnicos de la sociedad Pechelbronn en colaboración con el ingeniero J. Ferraud, consta de dos partes y un apéndice.

La primera parte, dividida en trece capítulos trata todo lo referente a ensayos físicos como ser: aspecto, olor, reflejo, color; densidad, viscosidad, destilación, puntos de inflamación y combustión, ensayos a bajas y altas temperaturas, ensayos mecánicos y de solubilidad, tensión superficial, tensión interfacial, ensayos de emulsión, ensayos eléctricos, tensión de vapor de las naftas, etc.

La segunda parte de veinte capítulos está dedicada a los ensayos químicos: investigación y dosaje del agua, de impurezas y sedimentos, dosaje de sedimentos potenciales en los fuel-oils, dosaje de grafito en un aceite grafitado, dosaje del asfalto, de la parafina, de los productos volátiles, ensayo de volatilidad, dosaje de cenizas y sales, dosaje de alcohol en los carburantes, dosaje de acidez y alcalinidad, índice de ácido, índice de saponificación; dosaje de productos saponificables y de jabones, investigación y dosaje de azufre y productos sulfurados, ensayo de combustión de kerosenes, propiedades de los combustibles para motores, índice de bromo, de amileno y de iodo, ensayos con ácido sulfúrico, determinación de carbón fijo, dosaje de gomas en las naftas, ensayo de alteración.

El apéndice complementa lo referente a color, viscosidad, ensayos al frío, mecánicos y de emulsión, así como dosaje de asfalto y ensayo de alteración. Sigue luego un glosario terminológico de productos petrolíferos y termina el volumen con un extracto bibliográfico.

Como puede colegirse por lo expuesto, este libro está llamado a ser un elemento de verdadera utilidad tanto para el fabricante como para el técnico consumidor, pues además de tratar en forma clara y detallada los distintos temas, se agregan en el texto conceptos aclaratorios tendientes a una mejor interpretación de los resultados arrojados por los distinos ensayos.

L. E. R.

*Revisa Chilena de Historia Natural pura y aplicada,* tomo XXXIX, Santiago de Chile, 1935.

Se ha incorporado a nuestra biblioteca el trigésimo noveno tomo de la prestigiosa Revista del epígrafe, que con tanto desinterés como dedicación dirige y edita nuestro miembro correspondiente en Santiago de Chile, el activísimo profesor Dr. Carlos E. Porter.

Con este tomo entra a cumplir la Revista cuarenta años de vida fecunda, habiendo constituído a través de ese lapso de tiempo, un alto exponente de la cultura científica chilena, efectuando una labor meritísima y manteniendo relaciones cordiales con los centros científicos y hombres de ciencia del mundo entero. No pocos investigadores argentinos han contribuído a redactar sus páginas, realizando así verdadera obra de confraternidad americana.

La existencia de tan importante publicación está íntimamente unida a la de su fundador y director, que le dedica todos sus afanes y hasta los ahorros de su peculio personal; ella constituye el trasunto de la vida abnegada y generosa del doctor Porter.

La *Revista Chilena de Historia Natural* ha publicado en los 39 tomos cerca de 1.500 colaboraciones originales, 1.100 extractos tomados de otras publicaciones, habiendo anunciado en su Seción Bibliografía más de 7.000 obras y revistas científicas.

Con motivo del fausto acontecimiento de haber entrado su Revista en sus 40 años, el doctor Porter ha recibido la satisfacción de que le lleguen del exterior de su país innumerables demostraciones de aprecio y solidaridad por su obra, mientras las autoridades y la opinión chilenas le tributaron expresivos homenajes de adhesión y afecto.

Nuestros *Anales* no pueden silenciar sus plácemes al doctor Porter y expresarle con cuanta simpatía siguen su labor.

M.